Martin Gardner

Festival mágico-matemático

Alianza editorial
El libro de bolsillo

Título original: *Mathematical Magic Show*
Traductor: Luis Bou

Primera edición: 1984
Segunda edición: 2018

Diseño de colección: Estudio de Manuel Estrada con la colaboración de Roberto Turégano y Lynda Bozarth
Diseño de cubierta: Manuel Estrada
Fotografía de Javier Ayuso

Calle Juan Ignacio Luca de Tena, 15
28027 Madrid
www.alianzaeditorial.es

ISBN: 978-84-9181-315-6
Depósito legal: M. 26.459-2018
Printed in Spain

Si quiere recibir información periódica sobre las novedades de Alianza Editorial, envíe un correo electrónico a la dirección: alianzaeditorial@anaya.es

Índice

Para Jim y Amy

Introducción

Es esta la octava recopilación de los artículos que desde diciembre de 1956 he venido publicando mensualmente en la sección «Juegos Matemáticos» de *Scientific American.* Al igual que en volúmenes anteriores, aquellos artículos han sido corregidos, puestos al día y ampliados para dar cabida a bibliografías y a nuevos y valiosos materiales suministrados por leales lectores.

Uno de ellos, quien gusta de leer mi sección, pero que no siente especial inclinación por las matemáticas, me ha preguntado no pocas veces: «¿Por qué no se podría, en atención a lectores como yo, dar un glosario de términos más frecuentemente empleados, que son sin embargo raramente definidos?».

Muy bien, querido lector, helo aquí. Los términos reseñados a continuación les son tan familiares a los matemáticos, incluso al más humilde, que la mayoría de los lectores apenas si pasarán de echarles una ojeada superficial. Pero si es usted una de esas almas atraídas por la aventura, a quien la mayoría de los libros de matemáticas le resultan incomprensibles, pero que por alguna extraña razón ha decidido mirar este, quizá pueda convenirle leer el siguiente glosario antes de proseguir.

algoritmo: Procedimiento para resolver un problema, por lo común a base de repetir pasos enormemente aburridos a menos que un ordenador los realice para usted. Aplicamos algoritmos al multiplicar dos números grandes, al hacer las cuentas de la casa, al lavar platos o segar el césped.

combinación: Un subconjunto de un conjunto, sin prestar atención ninguna al orden en que puedan presentarse los elementos. Si el conjunto es el abecedario, el subconjunto PAN es la misma combinación de tres objetos que PNA, APN, NPA, etc.

combinatoria: Estudio de las agrupaciones de objetos. Se ocupa, en particular, de descubrir si existe alguna agrupación que satisfaga ciertos requisitos especificados, y en caso afirmativo, de calcular cuántas pueden existir. Así, los cuadrados mágicos son soluciones de antiguos problemas combinatorios de la teoría de números. ¿Será posible situar las cifras de 1 a 9 en una disposición cuadrada, de manera que cada fila, cada columna y cada diagonal principal tenga la misma suma? Sí. ¿De cuántas maneras podemos conseguirlo? Descontados giros y simetrías, sólo de una. ¿Podrán disponerse estos nueve dígitos de manera que no haya dos sumas iguales y que las sumas sean consecutivas? No.

compuesto (número): Número entero que posee dos o más divisores primos. Dicho de otra forma, un entero distinto de 0, +1, o –1, y que no sea primo. Los primeros números compuestos positivos son 4, 6, 8, 9, 10. ¿Es primo el número

1.234.567? No. Tiene exactamente dos divisores primos, y por tanto es compuesto.

conjunto: Cualquier colección de objetos, tales como los números reales, los números naturales, los números impares, los números primos, las letras del alfabeto, el número de cabellos que usted tiene, las palabras de esta página, los miembros del Congreso de Diputados, y así *ad nauseam.*

dígitos: Los diez números 0, 1, 2, ..., 9 son los diez dígitos decimales. Los dos guarismos 0 y 1 son los dígitos binarios; 0, 1 y 2 son los dígitos ternarios, y así sucesivamente para sistemas de bases mayores. La notación de base 12 tiene doce dígitos.

diofántica (ecuación): Es una ecuación donde las letras (o incógnitas) denotan números enteros. De la resolución de estas ecuaciones se ocupa el «análisis diofántico».

e: Junto con π, el más notable de los números trascendentes; por definición, es el límite de $(1 + 1/n)^n$ cuando n crece indefinidamente. En notación decimal su valor es 2,718281828... La curiosa repetición del bloque 1828 es mera coincidencia.

enteros: Los números que usamos habitualmente para contar (1, 2, 3, ...), más el 0 y los negativos (–1, –2, –3, ...), opuestos de los primeros.

irracionales (números): Números reales que son no racionales. Expresados en notación decimal sus desarrollos son ilimitados y sus cifras no se repiten periódicamente. Los números π, e y $\sqrt{2}$ son irracionales.

módulo: Se dice que un número es igual a n (módulo k) cuando el resto de la división del número entre k es n. Por ejemplo, 17 = 5 (módulo 12) porque al dividir 17 entre 12 el resto es 5.

n-espacio (o espacio n-dimensional): Espacio euclídeo de n dimensiones. Una recta es un 1-espacio, un plano es un 2-espacio, y el mundo se encuentra en un 3-espacio. Los hi-

percubos del espacio tretradimensional se llaman teseractos
no negativos (enteros): 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...

orden n: Forma de clasificar objetos matemáticos que consiste en etiquetarlos con enteros no negativos. Un tablero de ajedrez es una disposición cuadrada de orden 8 si se cuenta el número de casillas de uno de sus lados, pero es de orden 9 si en lugar de casillas contamos las líneas de retículo que contiene cada lado.

permutación: Un subconjunto ordenado de un conjunto. Si el conjunto es el alfabeto, PAN, NAP, APN, etc. son diferentes permutaciones del mismo conjunto de letras. Rojo, azul, blanco es una permutación de rojo, blanco, azul.

poliedro: Cuerpo sólido limitado por caras planas. Un tetraedro es un poliedro de cuatro caras; un cubo, un poliedro de seis.

primo: Número entero, distinto de 0, de +1 y de –1, que no es divisible exactamente por ningún entero, exceptuados él mismo (con signo más o signo menos) y 1 (con cualquiera de ambos signos). Los primeros números primos positivos son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ... Dos números primos interesantes: 1.234.567.891 y 11.111.111.111.111.111.111.111. El mayor de los números primos conocidos (descubierto en 1971) es $2^{19937} - 1$. Su expresión decimal tiene 6.002 cifras.

racionales (números): Son los números enteros, más todos los quebrados (o fracciones) cuyo numerador y denominador sean enteros. Expresados en forma decimal, los números racionales o bien carecen de mantisa, o esta consta de un número finito de cifras, o estas se repiten periódicamente a partir de un cierto punto.

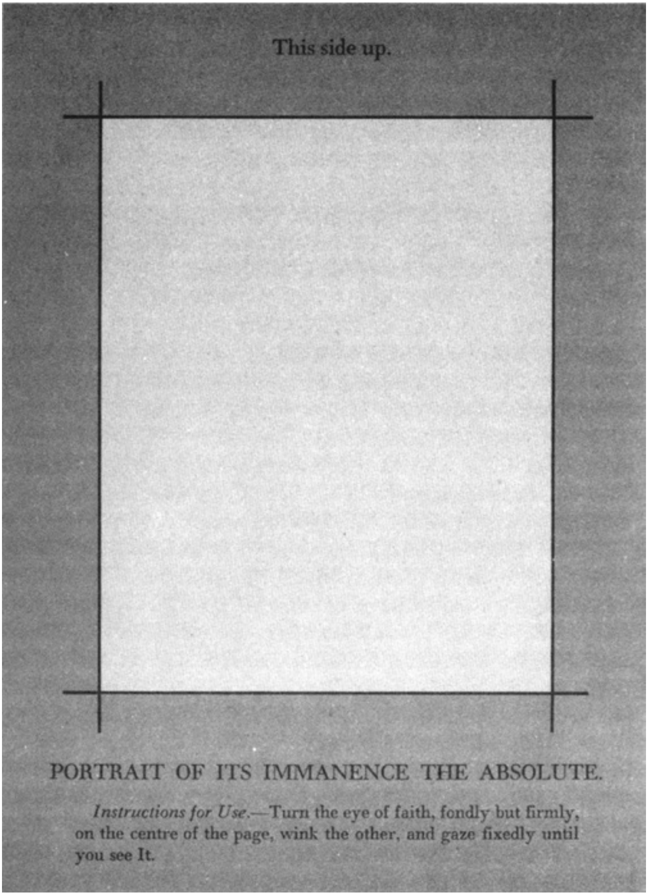
reales (números): Se denominan así los números racionales más todos los irracionales. Se llaman así para oponerlos a los números imaginarios, tales como la $\sqrt{-1}$, a pesar de que los números imaginarios sean tan reales en realidad como puedan serlo los reales.

recíproco: El quebrado resultante de invertir las posiciones de numerador y denominador en una fracción. La fracción recíproca de 2/3 es 3/2. El recíproco de 3 (o sea, 3/1) es 1/3. El recíproco de 1 es 1.

singularidad: Punto en el que a una ecuación (o a un proceso físico por ella representado) le sucede algo peculiar cuando una o más de sus variables toman ciertos valores. Al lanzar al aire una moneda, esta pasa por una singularidad en lo más alto de su trayectoria, porque precisamente en ese punto su velocidad ascensional es nula. De acuerdo con la teoría de la relatividad, ninguna nave espacial podrá viajar más rápidamente que la luz, porque a esa velocidad las ecuaciones de longitud, tiempo y masa entran en una singularidad, en la cual la longitud se contrae a cero, el tiempo se detiene y la masa se hace infinita.

Esta introducción está a punto de entrar en la singularidad en la que abruptamente se interrumpe.

Martin Gardner



This side up.

PORTRAIT OF ITS IMMANENCE THE ABSOLUTE.

Instructions for Use.—Turn the eye of faith, fondly but firmly, on the centre of the page, wink the other, and gaze fixedly until you see It.

Figura 1. Portada de la revista *Mind,* número especial de Navidad de 1901.

1. Nada

Nadie parece saber desenvolverse con ella.
(Nadie, desde luego, sí sabría.)

P. L. Heath

Nuestro tema es la nada. Por definición, nada es lo que no existe, aunque los conceptos que de ella nos formamos sí existen en tanto que conceptos. En matemáticas, en ciencia, en filosofía y en la vida ordinaria resulta enormemente útil disponer de palabras y símbolos para expresar tales conceptos.

Lo más que pueden acercarse los matemáticos a la nada es por la vía del conjunto vacío, llamado también conjunto nulo. Este conjunto no es lo mismo que la nada, porque el conjunto vacío tiene la misma clase de existencia –sea esta cual fuere– que cualquier otro conjunto, no obstante ser el vacío lo singular respecto a todos ellos. El conjunto vacío es el único conjunto que carece de elementos, y también el único que es subconjunto de cualquier otro. De una cesta con tres manzanas podemos tomar una, dos, tres o ninguna manzana. A una cesta vacía podemos, si queremos, añadir nada.

El conjunto vacío denota, si bien no denota cosa alguna. Denota, por ejemplo, cosas tales como el conjunto de todos los círculos cuadrados, el conjunto de todos los números primos pares distintos de 2, y el conjunto de todos los lectores de este libro que sean chimpancés. Denota, en general, el conjunto de todos los *x* que verifiquen cualquier enunciado concerniente a *x* que sea falso para todos los valores de *x*. Cualquier afirmación acerca de los miembros del conjunto vacío es verdadera, porque el conjunto vacío no contiene ni un solo elemento para el cual el enunciado pueda ser falso.

El conjunto vacío se simboliza Ø. No debemos confundirlo con 0, que es el símbolo del número cero. Ordinariamente, 0 es un número que denota el número de elementos de Ø. El conjunto vacío no denota a ningún ente, mientras que 0 denota el número de elementos pertenecientes a tales conjuntos, por ejemplo el número de manzanas de una canasta vacía. El conjunto de estas inexistentes manzanas es Ø, mientras que el número de manzanas es 0.

Un método de construcción de los números naturales, descubierto por el gran lógico alemán Gottlob Frege, y luego redescubierto por Bertrand Russell, consiste en partir del conjunto vacío e ir aplicando unas cuantas reglas y axiomas sencillos. El cero es definido como el número cardinal de elementos de cualquier conjunto que sea equivalente (es decir, que pueda ponerse en correspondencia biunívoca, elemento por elemento) al conjunto vacío. Una vez creado el 0, el 1 se define como el número de elementos de todo conjunto equivalente al conjunto que solamente contiene como elemento al 0; 2 es el número de elementos de cualquier conjunto equivalente al formado por

0 y 1; 3 es el número de elementos de cualquier conjunto equivalente al que forman 0, 1 y 2, y así sucesivamente. En general, un entero cualquiera es el número de elementos contenidos en cualquier conjunto equivalente al que forman todos los números naturales precedentes.

Existen otros métodos para ir construyendo recursivamente el sistema de los números naturales a partir de la nada, cada uno con ciertas sutiles ventajas y desventajas, en buena medida psicológicas. John von Neumann, por ejemplo, abrevió en un paso el procedimiento de Frege. Von Neumann prefería definir como 0 al conjunto vacío, como 1 al conjunto cuyo único elemento es el conjunto vacío, a 2, como el conjunto cuyos miembros son el conjunto nulo y el 1, y así sucesivamente.

Hace pocos años, John Horton Conway, de la Universidad de Cambridge, atinó con un nuevo y notable método para construir los números, partiendo igualmente del conjunto vacío. Su técnica fue descrita por vez primera en un folleto de trece páginas mecanografiadas y fotocopiadas que llevaba por título *All Numbers, Great and Small* ('Todos los números, grandes y pequeños'). Así comienza el opúsculo: «Deseamos construir todos los números. Veamos cómo abordaron este problema quienes en el pasado fueron hábiles en la construcción de números». El folleto concluye dejando pendientes diez cuestiones, de las cuales ésta es la última: «¿Sirve de algo toda esta construcción?».

Conway explicó su nuevo sistema a Donald E. Knuth, profesor de informática de la Universidad de Stanford, un día de 1972 en que se encontraron al ir a comer. Knuth quedó inmediatamente fascinado por sus posibilidades y su revolucionario contenido. En 1973, durante una semana de esparcimiento en Oslo, Knuth escribió una introducción al método de Conway, dándole forma de novela corta. Esta novelita fue publicada en 1974, en edición de bolsillo, por Addison Wesley, que edita también la conocida serie de Knuth titulada *The Art of Computer Programming.* Que yo sepa, ha sido la única ocasión en que un descubrimiento matemático de primer orden ha visto la luz en forma de obra de ficción. Un libro posterior de Conway, *On Numbers and Games,* se abre con una descripción de su construcción del sistema de números, para seguidamente aplicar su teoría a la construcción y análisis de juegos bipersonales. (Véase mi sección «Juegos Matemáticos», en *Scientific American,* septiembre de 1976, o en *Investigación y Ciencia,* noviembre de 1976).

La novelita de Knuth, *Surreal Numbers,* lleva el subtítulo «De cómo dos ex estudiantes se dedicaron a la matemática pura y hallaron la felicidad total». La principal aspiración del libro, explica Knuth en un *post-scriptum,* no es tanto enseñar la teoría de Conway cuanto «mostrar cómo se podría emprender el desarrollo de una teoría así». Y continúa diciendo:

> Así pues, conforme los personajes de este libro van gradualmente explorando y construyendo el sistema numérico de Conway, yo he ido recogiendo sus pasos en falso y sus frustraciones junto a sus ideas felices. Quería yo dar un retrato razonablemente fiel de principios importantes, técnicas, gozos, pasiones y filosofía de las matemáticas, así que escribí esta historia conforme iba yo mismo realizando esta investigación.

Los dos ex estudiantes de matemáticas creados por Knuth, Alice y Bill (*A* y *B*) han decidido huir del «sistema», refugiándose en un puerto de la costa del océano Indico. Allí descubren y excavan una losa negra semienterrada, donde está esculpido un texto en hebreo arcaico. Bill, que sabe hebreo, consigue traducir la frase inicial: «En el principio todo era vacío, y J.H.W.H. Conway comenzó a crear números». JHWH es una transliteración de «Jehovah» escrito a la usanza del hebreo antiguo. En la piedra, «Conway» tampoco contenía vocales, y Bill dio esta traducción por ser el más breve de los apellidos ingleses capaz de acomodarse a las consonantes que Bill supo encontrar.

La traducción de la «Piedra Conway» prosigue:

> Y Conway dijo: «Sean dos reglas que engendren todos los números, grandes y pequeños. Esta habrá de ser la primera: cada número corresponde a dos conjuntos de números previamente creados, tales que ningún miembro del conjunto izquierdo es mayor o igual que ningún miembro del conjunto derecho. Y la segunda regla habrá de ser: un número es menor o igual que otro número si y solamente si ningún miembro del conjunto izquierdo del primer número es mayor o igual que el segundo número, y ningún miembro del conjunto derecho del segundo número es menor o igual que el primer número». Y Conway examinó estas dos reglas que él había creado y vio que eran muy buenas.

El texto de la losa procede entonces a explicar cómo en el día cero Conway creó el número cero. Así lo hizo, colocando el conjunto vacío a la izquierda y también a la derecha. Con notación simbólica, $0 = \{\emptyset \mid \emptyset\}$, donde la barra vertical sirve para separar los conjuntos izquierdo y derecho. Ningún elemento del conjunto Ø escrito a la izquierda es mayor o igual que ningún elemento del Ø escrito a la derecha, porque Ø *carece* de elementos, y por tanto, la primera regla de Conway se cumple. Aplicando la segunda, es fácil ver que 0 es menor o igual que 0.

Al día siguiente, revela la piedra, Conway creó los dos primeros enteros distintos de cero, 1 y –1. El método consiste, sencillamente, en combinar el conjunto vacío con el número 0 de las dos formas posibles: $1 = \{0 \mid \varnothing\}$ y $-1 = \{\varnothing \mid 0\}$. Todo funciona; –1 es menor, pero no igual, que 1. Ahora, como es obvio, 1 y –1, y todos los números subsiguientemente creados, pueden ser insertados en los miembros izquierdo y derecho de la fórmula bilateral; de este modo van siendo construidos los enteros. Formando con 0 y 1 el conjunto izquierdo y tomando para el derecho el Ø se crea el 2. Con 0, 1 y 2 a la izquierda y Ø a la derecha se crea el 3; y así los demás.

En este punto quizá los lectores encuentren de su agrado explorar un poco por su cuenta. La ilustración de la portada de *Surreal Numbers,* original de Jill C. Knuth, muestra dos grandes cantos rodados cuyas formas simbolizan $\{0 \mid 1\}$. ¿Qué número define esta expresión? ¿Sabrá el lector demostrar que $\{-1 \mid 1\} = 0$?

«Creced y multiplicaos», dice Conway a los enteros. Combinándolos primero en conjuntos finitos y luego en conjuntos infinitos, la «copulación» de conjuntos bilaterales prosigue, sin más ayuda que las dos reglas de Conway, cuya sencillez es casi ridícula. De ellas van manando todos los restantes números reales: primeros los quebrados, cocientes de enteros; luego los irracionales. Al cabo de aleph-cero días se produce una pavorosa explosión (el *Big Bang*) y el universo comienza a existir. Sin embargo, eso no es todo. Antes de que Conway haya terminado su método ha producido todos los números transfinitos de Georg Cantor, todos los números infinitesimales (que son los recíprocos de los números infinitos), y además, conjuntos infinitos de curiosas cantidades nuevas, como las raíces de transfinitos e infinitesimales.

Es una proeza de prestidigitación que nos deja atónitos. Sobre una mesa construida con unos cuantos axiomas de teoría de conjuntos estándar descansa un sombrero vacío. Conway agita en el aire dos reglas sencillas, mete después la mano en casi la nada y va sacando del sombrero un tapiz infinitamente rico de números que forman un cuerpo real y cerrado. Cada número está arropado y cercado por una pléyade de nuevos números que están más cercanos de él de lo que pueda estarlo ningún otro valor «real». El sistema es verdaderamente «surreal».

«¡Chico, vaya con el conjunto vacío! –exclama Bill–. Me parece que voy a escribir un libro que se titule *Propiedades del conjunto vacío*».

La idea de que la nada tenga propiedades es, desde luego, lugar común en la filosofía, en la ciencia y en el lenguaje ordinario. A la Alicia de Lewis Carroll puede parecerle absurdo que el Conejo le ofrezca vino inexistente, o que el Rey Blanco admire su habilidad para no ver a nadie en la carretera y se maraville de que nadie llegase antes que el Conejo a causa de que nadie puede ir más rápido que él. Es fácil, sin embargo, pensar en ejemplos donde la nada entra verdaderamente a formar parte de la experiencia humana de forma positiva.

Fijémonos en los agujeros. Un viejo acertijo pregunta cuánta basura se encuentra en un agujero rectangular de ciertas dimensiones. Aunque el agujero tiene todas las propiedades de un paralelepípedo rectangular (vértices, aristas, caras de área bien definida, volumen, etc.), la respuesta es que en el agujero no hay basura alguna. Los diversos huecos y orificios de nuestro cuerpo son esenciales para nuestra salud, nuestra conciencia sensorial o nuestro placer. En *Dorothy and the Wizard of Oz,* el hombre trenzado, que vive en Monte Pirámide, en el interior de la tierra, le explica a Dorothy cómo llegó allí. Había sido fabricante de agujeros para quesos suizos, rosquillas, botones, emplastos porosos y cosas por el estilo. Un día decidió hacer acopio de gran cantidad de hoyos para postes, que fue apilando, unos sobre otros. De esta forma hizo un profundo pozo vertical, donde accidentalmente se cayó.

La teoría matemática del rompecabezas de cubos deslizantes de Sam Loyd (15 cubos unitarios alojados en una caja plana de 4 × 4) resulta mucho más fácil de explicar suponiendo que el hueco es un pequeño cubo móvil. Algo semejante sucede cuando un átomo de oro se difunde a través del plomo. Burbujas de nada, vacías, desde tamaños moleculares hacia arriba, van a la deriva, giran, chocan y rebotan en el seno de fluidos como si fueran partículas sólidas. Las corrientes negativas en los conductores resultan del movimiento de los electrones libres en su interior. De la misma manera, los huecos que dejan esos electrones pueden producir una corriente positiva en sentido contrario. En el capítulo 11 del *Tao Tê Ching,* Lao-Tzu escribe:

Treinta radios comparten el cubo de la rueda;
mas solo el agujero le da su utilidad.
Moldea una jarra con arcilla;
el hueco interior le da su utilidad.
Corta puerta y ventanas para la estancia;
solo estos vanos le dan su utilidad.
Se obtiene pues beneficio de lo que hay;
la utilidad la da lo que no hay.

Osborne Reynolds, ingeniero inglés fallecido en 1912, inventó una elaborada teoría en la cual la materia está formada por micropartículas de nada desplazándose a través del éter, de igual manera que las burbujas se desplazan por el interior de un líquido. Los dos libros donde la expone –*On an Inversion of Ideas as to the Structure of the Universe* y *The Sub-Mechanics of the Universe,* ambos publicados por Cambridge University Press– fueron tomados tan en serio que W. W. Rouse Ball, en las ediciones iniciales de sus *Mathematical Recreations and Essays,* dijo de esta teoría que era «más plausible que la hipótesis del electrón».

La idea de Reynolds no es tan absurda como puede parecer a primera vista. P. A. M. Dirac, en su famosa teoría que predijo la existencia de antipartículas, imaginaba al positrón (antielectrón) como un agujero en un continuo de carga negativa. Cuando un electrón y un positrón interaccionan, el electrón cae en el hueco del positrón, provocando así la aniquilación de ambas partículas.

La vieja idea de un «éter estancado» ha sido abandonada por los físicos, pero su lugar no ha sido invadido