John D. Barrow

1 +1 no es (siempre) 2
Una lección de matemáticas

Traducción de Dulcinea Otero-Piñeiro

Alianza editorial
El libro de bolsillo

Título original: *1 + 1 non fa (sempre) 2. Una lezione di matemàtica*
Revisión científico-técnica de la traducción:
David Galadí-Enríquez, doctor en física

Diseño de colección: Estrada Design
Diseño de cubierta: Manuel Estrada
Fotografía de Javier Ayuso

PAPEL DE FIBRA CERTIFICADA

Calle Juan Ignacio Luca de Tena, 15
28027 Madrid
www.alianzaeditorial.es

ISBN: 978-84-1148-045-1
Depósito legal: M. 19.274-2022
Printed in Spain

Si quiere recibir información periódica sobre las novedades de Alianza Editorial, envíe un correo electrónico a la dirección: alianzaeditorial@anaya.es

Índice

Para Stephen, que construye,
cuenta y juega

Si la gente no cree que las matemáticas son simples es únicamente porque no se da cuenta de lo complicada que es la vida.

John von Neumann

Prefacio

Este es el último libro que escribo. No podré escribir ninguno más. Trata sobre números. Los números cuentan. Muchas personas creen que una operación como $1 + 1 = 2$ es demasiado simple para crear alguna inquietud. Sin embargo, aquí desmenuzaremos algunas de las complicaciones que plantea esta suma elemental. Analizaremos las sutilezas de sumar cosas diferentes. A lo largo del camino nos toparemos con algunos de los mayores matemáticos de los siglos XIX y XX que estudiaron esta cuestión y descubriremos cómo la abordaron y cómo explicaron el proceso de la adición. Esto nos llevará a considerar asuntos muy inusuales, como el estudio de infinitos, cómo sumarlos y los debates sobre si deben contemplarse como parte de las matemáticas. Echaremos una ojeada a una prueba simple de la famosa incompletitud de Gödel y a los acalorados debates sobre qué son en última instancia las matemáticas:

«¿son un descubrimiento o son una invención nuestra?». Pero antes indagaremos en los intentos que acometieron los pueblos antiguos para desarrollar sistemas de cómputo a partir de *uno,* el cual, sumado a otro *uno,* da *dos*. ¿Hasta dónde consiguieron llegar? Veremos que cada sociedad primitiva desarrolló distintas formas de contar, y que casi todas las que fueron más allá de contar de uno en uno y de dos en dos acabaron coincidiendo en el cómputo por decenas y llevando la cuenta de esos grupos de decenas porque tenemos diez dedos en las manos. Por último, conoceremos algunas propiedades absolutamente inesperadas de los números uno y dos descubiertas por primera vez de una forma casual por Simon Newcomb, aunque ahora se conocen como ley de Benford, y veremos por qué son verdad.

Los números no son lo único con lo que se puede contar. Las personas son mucho más importantes. Las personas más importantes con las que cuento yo son: Elizabeth, que ha sido mi amada esposa durante 45 años y a quien conozco desde hace al menos 55; nuestros hijos y sus parejas, David y Emma, Roger y Sophie, Louise y Stephen; y nuestros nietos, Tilly, Darcey, Mahler, Guy y Poppy.

Quisiera manifestar un agradecimiento muy especial a nuestro hijo Roger, quien durante esta etapa tan difícil ha sido una gran ayuda dando muestras de una fortaleza ilimitada. Asimismo, todo mi agradecimiento a Pino y Jo por los esfuerzos que han dedicado a materializar la idea de este libro y por haber supervisado la traducción al italiano con ayuda de algunos colegas matemáticos. Yo no

podría haberlo logrado sin ellos. Que Dios los bendiga a todos.

«Cual corriente escindida por una gran roca, sé que volveremos a encontrarnos» (*A Hundred and Seventy Chinese Poems,* versión en inglés de Arthur Waley).

John D. Barrow

1. 1 + 1: ¿de verdad es algo tan complejo?

One is one and all alone
and evermore shall be so[1]

Green Grow the Rushes, O.
(Canción popular inglesa)

Durante el primer curso de la escuela de primaria todos nos encontramos con la primera fórmula de nuestra vida: 1 + 1 = 2, o sea, el asunto de este libro. Este es el primer paso para el aprendizaje de las matemáticas. Pero ¿cuánto da de sí para hablar sobre ella? ¿No es un enunciado obvio, una mera definición de lo que entendemos por «2»? Pues bien, cuando se reflexiona algo más sobre esta fórmula por primera vez, resulta que lo que dice no es tan obvio. ¿Cuánto suman una manzana y una pera? ¿Dos qué? No son dos peras ni dos manzanas. ¿Da el resultado de esta suma simplemente dos cosas como resultado? Y ¿qué son los símbolos «+» y «=»?; ¿qué significan en realidad? Si sumamos dos ondas idénticas pero

1. La estrofa viene a decir: «Uno es uno y así es y será por siempre jamás». *(N. de la T.)*

con fases opuestas, de forma que las crestas de la una coincidan con los valles de la otra, lo que se obtiene es cero ondas, no dos. Si se suman un cero y un cero se obtienen dos ceros, que valen cero. Sume un infinito a un infinito y a otro infinito y obtendrá un solo infinito. Ninguna de estas sumas sigue el patrón de que la adición de uno y uno da dos. Las cosas no son tan simples como parecen. Hay que seguir ciertas reglas para que la suma de dos unidades dé dos.

Todos los sistemas de cómputo, así como los dominios científicos y técnicos creados a partir de ellos, se basan en última instancia en sistemas que empezaron sumando uno más uno. Muchos de esos sistemas de cómputo primitivos nunca fueron más allá de sumar cada vez más y más unos entre sí, usando los dedos de las manos y de los pies como referencia para formar grupos de cinco, de diez o incluso de veinte unidades más fáciles de recordar. La naturaleza especial del número dos se nota en la lengua inglesa en la abundancia de palabras que ofrece para referirse a dos cosas: *pair, duo, brace, double, twin, duet, couple, yoke, twosome, dyad, tandem, duplet* y *twain*. Y cada una de ellas se emplea para designar dos cosas muy específicas; por ejemplo, para hablar de un par de faisanes, en inglés se usa el término *brace;* para hablar de un par de bueyes se usa la palabra *yoke* ('yunta'); para referirse a un par de guantes se usa *pair,* y para aludir a una pareja de baile se emplea *couple;* pero nunca se usará *brace* para hablar de un par de zapatos, ni *couple* para nombrar un par de guantes. Esto ilustra lo indisociable que era en sus orígenes el objeto contado de la palabra empleada para indicar dos cosas.

A medida que se avanza por la escala de los números aparecen algunos términos concretos para aludir a tres cosas, como tríada, triple o trío, pero a partir de ahí estos nombres específicos desaparecen casi por completo: no hay tantos términos para referirse a cantidades como 7 u 11. Esto se aprecia en el patrón que siguen los nombres de los primeros números cardinales y ordinales en cinco lenguas europeas: castellano, inglés, francés, alemán e italiano. En ninguna de estas lenguas hay una relación entre el nombre que reciben los dos primeros números en sus versiones ordinal y cardinal, mientras que a partir del tres encontramos cierta relación, o derivación, en esos términos. Veamos los nombres de los cuatro primeros números en cada uno de esos idiomas:

Castellano: uno/primero, dos/segundo, tres/tercero, cuatro/cuarto...
Inglés: one/first, two/second, three/third, four/fourth...
Francés: un/premier, deux/second (o deuxième), trois/troisième, quatre/quatrième...
Alemán: eins/erste, zwei/ander (o zweite), drei/dritte, vier/vierte...
Italiano: uno/primo, due/secondo, tre/terzo, quattro/quarto...

En todas las lenguas indoeuropeas conocidas, los números por encima de 4 son sustantivos que nunca se usan como adjetivos que puedan cambiar de forma dependiendo del tipo de objeto al que hacen referencia. Esto evidencia la antigüedad de los conceptos de unidad y duplicidad, frente a la de otras cantidades mayores. Es posible que esto guarde alguna relación con la capacidad mental humana para reconocer al instante si hay 1, 2, 3, 4 o tal vez incluso 5 objetos en un conjunto sin necesidad de enumerarlos uno por uno, ya sea mental o físicamente. Cuando son más de cinco perdemos esa capacidad y necesitamos contarlos, a menos que podamos subdividirlos en grupos más reducidos, del mismo modo que separamos los números de teléfono en grupos de dos o tres dígitos espaciados entre sí para desplazar el problema de recordarlos a la memoria a corto plazo. O bien la división puede resultar sin más del mero hecho de que tenemos cuatro dedos largos en cada mano y, en efecto, muchas civilizaciones antiguas tuvieron una unidad de longitud denominada «palmo», que en algunos lugares se corresponde con la extensión que abarcan esos cuatro dedos juntos. De hecho, el término *dígito* que usamos para aludir a un número, deriva de la palabra latina *digitus,* 'dedo', mientras que una de las medidas que se sigue empleando en la actualidad, sobre todo al pedir una bebida espirituosa, es «un dedo». Un dedo de whisky equivale a llenar el vaso hasta la altura del grosor de un dedo de la mano.

En tiempos modernos hemos usado sistemas de cómputo en distintas bases, especialmente el sistema binario que se emplea con los lenguajes de computadoras. ¿Qué ocurre entonces con la fórmula 1 + 1?

Los filósofos de las matemáticas han indagado con más profundidad en el significado de nuestra sencilla fórmula, planteándose si puede demostrarse a partir de axiomas que definan los números y la operación de sumarlos entre sí. El manual clásico de 1910 titulado *Principia Mathematica,* de Bertrand Russell y Alfred North Whitehead, profesor del primero, no demuestra que 1 + 1 = 2 hasta muchos cientos de páginas después del inicio de esta obra de 2000 páginas en tres volúmenes[2]. Tras la demostración de que 1 + 1 = 2, los autores señalan de un modo encantador que ¡esta «proposición es útil en ocasiones»! Más adelante, en el capítulo seis, veremos su demostración y la traduciremos a unos términos sencillos, comprensibles sin necesidad de recurrir a la lógica matemática. Los filósofos todavía se preguntan si esa fórmula no es más que una definición de lo que significa el número 2 o el signo +, y si se trata (junto con el resto de las matemáticas) de algo que hemos descubierto o sencillamente inventado, lo cual debatiremos en el capítulo diez.

En unos términos más ligeros, todos estamos familiarizados con los usos simples de los números pequeños, por ejemplo, los 2 puntos, o ahora 3, que se consiguen al ganar un partido de fútbol, 0 puntos por perder y el punto que logra cada equipo por empatar. El cambio a la obtención de 3 puntos por ganar es bastante incómodo desde un punto de vista numérico. Un partido con resultado de victoria para uno de los contrincantes da 3 puntos en total: 3 puntos para el equipo ganador y 0 para el equipo perdedor; pero un partido que acaba en empate otorga tan solo 2 puntos en total, uno para cada equipo. Con el sistema antiguo que otorgaba también 2 puntos al

2. La demostración comienza en la página 83 del volumen 2, donde aparece etiquetada como Proposición 110.643.

equipo vencedor, siempre se repartían 2 puntos en total con independencia del resultado final. El sistema nuevo impide prever la evolución futura de un equipo dentro de una liga de fútbol después de jugar muchos partidos. Estamos acostumbrados a la deducción simple que efectúan jugadores, entrenadores y periodistas de que el número máximo de puntos que puede reunir un equipo se corresponde con los puntos que tiene en el momento actual más todos los que obtendría si ganara todos los partidos que le quedan por jugar. Pero ¿y si queremos tener en cuenta todo el laberinto de interconexiones que crean los resultados de todos los partidos que le restan por jugar a un equipo determinado? Resulta que el viejo sistema de otorgar 2 puntos en cada partido, ya fuera con victoria de un bando o con empate entre ambos, permitía predecir las posibilidades futuras de cada equipo a partir de un instante concreto de la temporada. Sin embargo, si cada victoria otorga 3 puntos, el hecho de que un partido pueda valer 2 o 3 puntos dependiendo del resultado incrementa lo suficiente la cantidad de posibilidades como para que deje de ser matemáticamente predecible la clasificación final de cada equipo particular[3]. Sencillamente se crean demasiadas rutas futuras posibles al duplicar las opciones de cuántos puntos se asignan en cada partido.

Veamos esta otra paradoja para ir abriendo boca. Todos estamos de acuerdo en que 1 – 1 da 0, de igual manera que –1 + 1 es 0. Además, la suma de sumas que dan

3. Técnicamente pasa de ser un problema computacional de clase P a uno de clase NP.

0, posiblemente infinitas sumas, siempre sigue dando 0. Pero en ese caso,

$$\begin{gathered} 1 = 1 + 0 + 0 + 0 + \ldots = \\ = 1 + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = \\ = 1 + 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \ldots = \\ = 1 + 1 + 0 + 0 + 0 + \ldots = 2 \end{gathered}$$

De modo que 1 = 2.

Y entonces toda la aritmética se derrumba porque, si hay una contradicción lógica dentro de un sistema axiomático, entonces se podrá utilizar para demostrar que cualquier cosa es verdadera. Un ejemplo célebre de ello ocurrió cuando un alumno respondió a esta afirmación de Bertrand Russell durante una clase retándolo a demostrar que él era el Papa de Roma. Russell respondió al instante:

> ... tenemos que 2 = 1. El conjunto que nos contiene tan solo al Papa y a mí está formado por dos miembros. Pero como 2 = 1, consta de un solo miembro; por tanto, yo soy el Papa de Roma.

Y aquí se disparan las alarmas. Debe de haber algo equivocado en la deducción de esta ecuación. ¡Sigamos adelante!

2. Los dedos de las manos y de los pies: cómo empezamos a contar

«Caballero, ¿me permite una pregunta? ¿Qué haría si la Iglesia le dijera que dos más tres son diez?». «Caballero –respondió él–, lo creería, y entonces contaría del siguiente modo: uno, dos, tres, cuatro, diez». Así quedé totalmente satisfecho.

James Boswell
(Boswell in Holland: 1763-1764)

La capacidad de contar es más universal que cualquier otro atributo humano, salvo el de la adquisición del lenguaje. El lenguaje parece preprogramado en el cerebro a través de un proceso evolutivo. Noam Chomsky fue el primero en proponer que este programa se configura a una edad temprana con la adquisición de pautas externas procedentes del entorno de la persona que fijan la lengua materna (la primera que se adquiere), lo que acciona varios interruptores ya existentes en el programa cerebral del lenguaje. Esto explicaría fenómenos tan extraños como que, en los primeros años de vida, parecemos saber más de lo que hemos podido aprender o nos han podido enseñar. Gran parte de ello ya está ahí esperando a ser activado.

Se ha especulado mucho sobre si ocurrirá lo mismo con la capacidad numérica. Pero, comparado con nuestras habilidades lingüísticas, el sentido numérico del ser humano es muy rudimentario, y es mucho más probable que se adquiriera por necesidades básicas de la vida o por la naturaleza de nuestra propia fisiología: cinco dedos en cada mano, diez entre las dos, veinte si añadimos los dedos de los pies.

En todas las regiones del mundo antiguo encontramos los orígenes del cómputo representados por personas que contaban de dos en dos, o «contadores por pares». Estos pueblos seguían un sistema de cómputo que solo usaba una etiqueta para «uno» y otra etiqueta para «dos», y que construía cantidades más grandes mediante la combinación de esos dos términos. Un vestigio actual de este sistema simple en el que las cantidades superiores a dos se describieron en un principio como «más allá» o «trans» lo encontramos en los términos latinos *trans,* que significa 'más allá', y *tres,* el nombre del número 3. De igual modo, en francés existen los términos *tres,* para 'mucho', y *trois,* para el número 3. En particular, hay zonas de África, América del Sur y Nueva Guinea donde vemos este sistema para contar por pares ampliado a cantidades mayores con el simple recurso de la repetición, de forma que los números 3, 4 y 5 de nuestro sistema de hoy se expresan mediante «dos-uno», «dos-dos» y «dos-dos-uno». En general, este patrón no se sucedía de manera indefinida, tal como podría parecernos obvio en la actualidad, porque quienes contaban no consideraban cosas diferentes combinaciones tales como «dos-dos» o «dos-dos-uno» como cosas diferentes: solo eran la unión de las distintas agrupaciones que tenían identificadas, o sea, elementos individuales y pares. Para ir más allá en cuanto a conocimientos y capacidad de abstracción era necesario un salto conceptual mayor que solo se dio en algunas partes del mundo muy antiguo.

Sin embargo, cabría plantearse si aquellas sociedades primitivas contaban realmente o si se limitaban a realizar la suma 1 + 1 = 2 tal como la entendemos nosotros. Usaban los nombres de los números como meros adjetivos para describir lo que veían. Los pueblos indígenas de la Columbia Británica hablantes de las lenguas tsimshiánicas usaban palabras muy diferentes para nombrar cantidades distintas de objetos diversos. Por ejemplo, usaban una palabra concreta para uno y dos cuando se trataba de una conversación general en la que no se aludía a nada específico, y otros vocablos diversos para referirse a objetos planos, curvos, alargados, hombres, canoas o medidas:

	Números	
	1	2
En general	gyak	t'epqat
Objetos planos	gak	t'epquat
Objetos curvos	g'eral	goupel
Hombres	k'ul	t'epqadal
Objetos alargados	k'wawutskan	gaopskan
Canoas	k'amaet	g'alpeeltk
Medidas	k'al	gulbel

En este ejemplo, los términos individuales no tienen ningún interés especial; lo importante es el uso adjetivado de las cantidades para describir y diferenciar cosas. Los números actuales de las lenguas europeas se apartaron hace tiempo de su forma original, y muchas de las conexiones entre números, como nombres o adjetivos, han desaparecido con el paso de los siglos porque el foco de atención se ha puesto en los símbolos de los números y las reglas para combinarlos entre sí, no en las palabras empleadas para nombrarlos. Hoy día vemos de inmediato que una fórmula como 1 + 1 = 2 solo surgiría dentro de una misma categoría de objetos, por ejemplo, los objetos curvos. Si tuviéramos una mezcla de objetos de formas distintas, entonces 1 objeto curvo más 1 objeto plano no daría como resultado 2 objetos de una sola de esas categorías. El significado de los números no es lo mismo que contar. Sin esto último no habría aritmética: nada de 1 + 1 = 2. Por tanto, se observa una transformación en el uso actual de los números frente al que les daban aquellas civilizaciones antiguas. Cuando sumamos 1 y 1, estamos añadiendo una cosa de una clase específica a otra idéntica para obtener dos cosas iguales. Si queremos especificar de qué cosas se trata, tendremos que asegurarnos de que son de la misma clase.

No hay ningún sistema basado en el reconocimiento de las relaciones que mantienen diferentes cantidades. Veamos este testimonio revelador que dejó Francis Galton 120 años atrás sobre las peculiaridades de comprar o cambiar más de un bien al mismo tiempo en un mercado. En este caso se trata de cambiar ovejas por palos de tabaco:

> Cuando se realiza un trueque hay que pagar cada oveja por separado. Así, supongamos que la tasa de cambio de una oveja asciende a dos palos de tabaco. Sin duda, un demara se quedaría perplejo si le pidiéramos dos ovejas a

> cambio de cuatro palos. Yo lo he hecho y me he encontrado con que el hombre separó dos de los palos y echó una mirada por encima de ellos a la oveja que estaba a punto de vender. Tras convencerse de que una de ellas estaba pagada como era debido y descubrir sorprendido que en la mano le quedaban justo los dos palos necesarios para pagar la otra oveja, lo asaltaron las dudas; el procedimiento le pareció demasiado «fácil» para ser correcto, y volvió a examinar el primer par de palos, momento en que se le nubló la mente y, con la confusión, se paseó de una oveja a la otra; entonces interrumpió la transacción hasta tener dos palos en una mano y desprenderse de una oveja, y a continuación volver a recibir dos palos a cambio de entregar la segunda oveja.

Contar con los dedos es la base de todos los sistemas de cómputo relevantes conocidos. En algunas sociedades se añadieron todas las partes del cuerpo para contar más allá de los diez dedos. Esta ampliación es común entre los pueblos isleños del Pacífico, donde ha dado lugar a distintos totales después de sumar los diez dedos de las manos y de los pies a ambas muñecas, los codos, los hombros, el pecho, los tobillos, las rodillas y las caderas (lo que da un total de 33) u otras combinaciones de las partes del cuerpo.

Pero, volviendo a los totales más habituales para nosotros, el sistema decimal moderno, de origen indio, se basa en el número 10, de tal manera que 10 × 10 = 100, 10 × 10 × 10 = 1000, etcétera. Los diez dedos de las manos motivaron esa elección. Una excepción notable la encontramos en América Central, donde los indios yuki usan un sistema en base 8 en lugar de 10, aunque también cuentan con los dedos, solo que con los huecos que hay entre ellos. Se cree que, al igual que otros pueblos de América Central y del Sur, se ataban cuerdas entre los dedos para ayudarse de ellas al contar[1].

En la actualidad todavía encontramos distintas formas de contar con los dedos de las manos. En Gran Bretaña se cuenta a partir de la mano cerrada, extendiendo los dedos uno tras otro empezando por el pulgar y terminando por el meñique antes de continuar con la otra mano si es necesaria. En Asia y Australia hay quien comienza por el dedo meñique de la mano izquierda. En Japón se empieza con la mano abierta y se van replegando los dedos uno a uno. Este método se torna explícito en el significado de los nombres que reciben los números entre el pueblo dene-dinje de América, cuya traducción es:

1 = «doblado el final» (o sea, el meñique doblado por la mitad);
2 = «doblado otra vez» (ahora se dobla el anular);
3 = «doblado el centro» (se dobla también el dedo corazón);
4 = «solo queda uno» (es decir, al doblar el dedo índice, solo queda desplegado el pulgar)
5 = «mano terminada»

1. Yo solía preguntar en ambientes matemáticos y al público general por qué habría de elegir alguien contar en base 8. Nadie me supo responder hasta que di una charla a niños de primaria (hasta 10 años de edad) y formulé la misma pregunta. Una niña me dio la respuesta correcta al instante y dijo que era algo obvio porque ella practicaba juegos con cuerdas entre los dedos, como el de la cuna del gato (que consiste en que dos personas formen figuras alternadamente con una cuerda entrelazada en los dedos de ambas manos).