Eduardo Battaner López
y Estrella Florido Navio

100 problemas de Astrofísica

Alianza Editorial

Juan Ignacio Luca de Tena, 15; teléf. 393 88 88; 28027 Madrid
ISBN: 84-206-8676-X
Depósito legal: M. 7.846-2001
Fotocomposición e impresión: EFCA, S. A.
Parque Industrial «Las Monjas»
28850 Torrejón de Ardoz (Madrid)
Printed in Spain

A Carlos Battaner.
A Eugenia y a Clara.
A Edu y a Sergio.

Índice

Introducción

Este libro le viene como anillo al dedo al titulado *Introducción a la Astrofísica*, publicado en esta misma Editorial. Pero es un libro introductorio de problemas que puede servir de apoyo a cualquier otro curso de Astrofísica Elemental, dirigido a quienes quieran iniciarse en esta especialidad, o a estudiantes de Física en general, al ser la Astrofísica imprescindible en su formación científica. El lenguaje es asequible a muchos otros estudiantes de cultura científica media.

Habitualmente, los «problemas» se consideran como un aspecto secundario en el aprendizaje. Se supone que son aplicaciones y ejercicios. «Ejercicio» viene del latín «exercitium», con ese prefijo «ex», que nos señala la dirección hacia fuera. El buen problema debe tener justamente la dirección contraria: hacia dentro. De igual modo, no debería haber «aplicaciones» que no tuvieran «implicaciones».

Sólo hay una forma de entender la Física: haciéndola. En la Física, y en la Astrofísica en particular, no hay espectadores; sólo hay autores. Aunque la exposición de la teoría ya debería ir animada de este principio, actualmente los problemas constituyen la labor más creativa del estudiante en el proceso formativo.

Una característica del problema clásico —negativa desde cierto punto de vista— es que el enunciado está escrupulosamente especificado y pormenorizado, pretendiendo educar en la precisión del lenguaje y evitando múltiples interpretaciones. Pero el buen físico no es el que resuelve bien, sino el que plantea bien: aquel que sabe formular un problema con las hipótesis más simples y realistas. Dejemos los enunciados vagos y generales; las hipótesis que las ponga el estudiante. Si así es la investigación, ¿por qué eliminar esta componente en el aprendizaje?

Puede sazonarse el problema con humor y anécdotas, pero incluso el problema puede ser intrínsecamente humorista, porque en lo paradójico y en lo absurdo encuentra también nutrientes el proceso formativo.

No incluimos el Sistema Solar, de igual modo que este capítulo importante fue excluido en el volumen *Introducción a la Astrofísica.* Muchos libros de Astrofísica omiten la Astronomía de Posición. Pero ¿cómo hablar de fenómenos en nuestra Galaxia sin conocer las coordenadas galácticas?, ¿cómo hablar de estructura a gran escala del Universo sin conocer las supergalácticas?, ¿cómo preparar una observación sin conocer las ecuatoriales? La Astronomía de Posición es necesaria herramienta para el astrofísico. En este capítulo, como excepción, se ha introducido una breve descripción teórica de los conceptos básicos. Las coordenadas galácticas se introducen en el problema 40 y las supergalácticas, en el 43.

Algunos de nuestros colegas que quieran utilizar este libro como referencia, encontrarán algunos temas ausentes y otros superfluos. Es inevitable, ... «El que carretea, entorna».

1
La luz y la distancia

Problema 1

Calcular la constante solar[1].

Solución

Se llama «constante solar» al flujo que nos llega a la Tierra procedente del Sol. Para cualquier estrella

$$L = 4\pi R^2 q = 4\pi r^2 f$$

siendo L la luminosidad de un astro, o energía por unidad de tiempo radiada en todas las direcciones, R el radio, q el flujo en su superficie (energía emitida por unidad de tiempo y unidad de superficie), r la distancia a la Tierra y f el flujo recibido en la Tierra. El flujo solar $f_\odot$ en la Tierra es

$$f_\odot = \frac{L_\odot}{4\pi r^2}$$

[1] En el Apéndice 1 se habla de magnitudes, unidades y nomenclatura utilizada sobre Fotometría.

$L_\odot \approx 4 \times 10^{33}$ erg/s, $r \approx 1{,}5 \times 10^{13}$ cm ($\sim$8 minutos-luz), luego la constante solar $f_\odot \sim 1{,}4 \times 10^6$ erg s^{-1} cm^{-2} = = 1.400 J s^{-1} m^{-2} = 1.400 watt/m^2.

Si la superficie del tejado de una casa es de 50 m^2 y todo el tejado está recubierto de placas solares, podríamos conseguir 70 kW para el consumo familiar. Pero la eficacia de las placas, la inclinación no siempre favorable de los rayos solares, la nubosidad, etc., hacen que este tipo de energía solar sea interesante pero no suficiente.

Problema 2

Calcular la intensidad en el Sol.

Solución

Definimos la «intensidad» como el flujo recibido desde un área en la fuente emisora delimitada por un ángulo sólido unidad. Así, puede expresarse en erg s^{-1} cm^{-2} arcsec^{-2} (1 arcsec$^2 \equiv 1''^2$, un segundo de arco al cuadrado). Se utiliza para caracterizar la luz recibida de fuentes extensas. Familiaricémonos con ella en el caso más simple y próximo: el Sol.

La intensidad en el Sol no es constante. Hay un «oscurecimiento al borde», ligero, pero observacionalmente interesante pues permite obtener información sobre la estructura interna de la atmósfera solar. Supongamos, sin embargo, que fuera constante. Sería entonces

$$I = \frac{f_\odot}{\omega}$$

siendo $\omega = \pi R^2/r^2$, el ángulo sólido con el que se observa el Sol. R y r son las mismas magnitudes del problema anterior. Tenemos $\omega = \pi(7 \times 10^{10}/1{,}5 \times 10^{13}) \sim 7 \times 10^{-5}$ estereorradianes. Como 1 estereorradián es $4{,}25 \times 10^{10}$

Vimos que $f_\odot = 1{,}4 \times 10^6$ erg s^{-1} cm^{-2}, luego

$$I = \frac{1{,}4 \times 10^6 \text{ erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2}}{3 \times 10^6 \text{ arcsec}^{-2}} =$$

$$= 0{,}47 \text{ ergs}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ arcsec} \approx 2 \times 10^7 \text{ Wm}^{-2} \text{ stereorad}^{-1}$$

Calculemos ahora la intensidad del Sol observada desde Júpiter. La intensidad I no depende de la distancia. En efecto, vemos aquí que

$$I = \frac{f_\odot}{\omega} = \frac{L_\odot/4\pi r^2}{\pi R^2/r^2} = \frac{L_\odot}{4\pi^2 R^2}$$

Este resultado es general, es decir, I no depende de r, lo que la convierte en una magnitud física de gran interés observacional.

Normalmente, a esta magnitud física se la llama «brillo superficial» y se prefiere el término «intensidad» para otra magnitud física, utilizada en Transporte Radiativo, para cálculos en el seno de la fuente. Pero ambas magnitudes físicas son la misma.

En efecto, se define «intensidad», ayudándose de la figura 1, en el punto P, en una dirección determinada, como

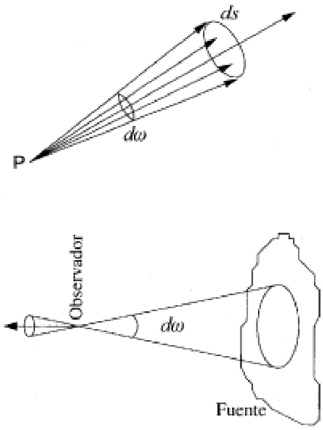

Figura 1

la energía que fluye por unidad de tiempo, en esa dirección con una holgura *dw* (la unidad de ángulo sólido) y a través de la unidad de superficie *ds*, colocada perpendicularmente a esa dirección.

Como se puede observar en la figura, a partir de ambas definiciones, la intensidad en el punto de observación, en la dirección contraria a la de la fuente, es precisamente el brillo superficial. No hay, pues, distinción entre ambos conceptos.

Problema 3

El disco de una galaxia espiral tiene una intensidad que viene dada por una exponencial, aproximadamente, es decir, $I = I_0 e^{-r/R}$, siendo I_0 una constante, igual a la intensidad central, y R otra constante, llamada escala radial. Calcular el flujo total del disco de la galaxia (r es la coordenada radial, la distancia de un punto al eje de rotación de la galaxia).

Solución

$$f = \int_{\text{fuente}} I dA = \int_0^{\infty} (I_0 e^{-r/R})(2\pi r dr) = 2\pi I_0 R^2$$

donde A sería ángulo sólido, y hemos integrado por anillos, suponiendo que la galaxia se ve «de cara».

Al hablar de objetos angularmente pequeños, como puede ser una galaxia vista desde la Tierra, r y R, que normalmente podrían ser distancias, suelen medirse en ángulos, de tal forma que su unidad podría ser 1 arcsec.

Problema 4

Si el Sol emitiera como un cuerpo negro, ¿qué temperatura tendría?

Solución

En el cuerpo negro existe una relación entre el flujo y la temperatura

$$q = \sigma T^4$$

Podemos conocer el flujo en la superficie solar $q_\odot = L_\odot / 4\pi R_\odot^2 = 4 \times 10^{33}$ erg $s^{-1}/4\pi(7 \times 10^{10}$ cm$)^2 = 6{,}5 \times 10^{10}$ erg s^{-1} cm^{-2}. (Compárese este valor con el flujo solar recibido en la Tierra, de $1{,}4 \times 10^6$ erg s^{-1} cm^{-2} solamente.)

La constante de Stefan-Boltzmann vale $\sigma = 5{,}67 \times 10^{-5}$ erg s^{-1} cm^{-2} K^{-4}, luego

$$T = \left(\frac{6{,}5 \times 10^{10} \text{ erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2}}{5{,}67 \times 10^{-5} \text{ erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ K}^{-4}} \right)^{1/4} \approx 5.800 \text{ K}$$

La temperatura del Sol, en su atmósfera, va decreciendo según ascendemos, y no puede decirse que tenga una temperatura única. El valor obtenido es un valor típico característico. Se denomina «temperatura efectiva». La temperatura interior es mucho mayor, del orden de 10^7 K.

Problema 5

Con la energía recibida con un radiotelescopio ¿se podría calentar una taza de café?

Solución

Supongamos que el flujo específico cuando el radiotelescopio observa una fuente es de 1 Jy. (Recordemos 1 Jy = 10^{-26} watt m^{-2} Hz^{-1} = 10^{-23} erg s^{-1} cm^{-2} Hz^{-1}), aunque se pueden medir flujos bastante menores. Esta unidad fue definida para evitar números con muchas potencias de 10, luego es un flujo característico en una radiofuente. Obsérvese que es un flujo «específico», es decir, por unidad de frecuencia, Hz^{-1}.

Hay que multiplicar este flujo por la superficie colectora, por el tiempo que el radiotelescopio lleva funcionando y por el rango de frecuencias en la observación:

$$10^{-23} \text{ erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$$

$\times$ 20 años (supongamos) de vida del telescopio $\times 3 \times 10^7$ (segundos en un año)
$\times 2\pi 50^2 \times 10^4$ cm^2 (área de un gran telescopio)
$\times 10^8$ Hz (si se mide con una longitud de onda de 30 cm, es decir 10^9 Hz, y suponiendo que la medida se hace con $\Delta\nu \sim 0{,}1\nu = 0{,}1 \times 10^9$ Hz)
≈ 100 erg $= 10^{-5}$ jul $= 0{,}24 \times 10^{-5}$ cal

Para calentar una taza de café, suponiendo que el café es agua pura, necesitamos un calor $Q = cm\Delta T$, siendo c el calor específico (1 cal/°K g para el agua), m la masa de café ($\sim$10 g) e ΔT el incremento de temperatura, $\sim$20 K. Tenemos $Q = 200$ cal.

Almacenando la energía recibida por un gran radiotelescopio, durante toda su vida de operación, no podemos calentar una taza de café. Ni con todos los radiotelescopios del mundo.

Problema 6

Se observa una estrella con $m = -26{,}78$ y $M = 4{,}79$. ¿Cómo se llama la estrella?

Solución

La relación entre la magnitud m de una estrella y su magnitud absoluta M es

$$m - M = 5(\lg r - 1)$$

fórmula no homogénea dimensionalmente que exige que r, la distancia al objeto, se mida en pc. De ella deducimos

$$r = 4{,}85 \times 10^{-6} \text{ pc} = 1 \text{ UA}$$

La estrella se llama Sol.

Problema 7

La raya $H\alpha$ está a 6.563 Å, pero en cierta estrella la encontramos a 6.569 Å. ¿A qué velocidad se aleja la estrella? En cierto cuásar, la raya $Ly\alpha$ a 1.216 Å, en el ultravioleta, se observa a 5.000 Å, en el visible. ¿A qué velocidad se aleja el cuásar? ¿Cuál es el desplazamiento al rojo en ambos casos?

Solución

En el caso de la estrella, la fórmula del efecto Doppler es

$$\lambda = \lambda_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

por lo que

$$\lambda - \lambda_0 = 6 = \frac{v}{c}\, 6.563$$

luego

$$v = 0{,}0009c = 274 \text{ km/s}$$

Su desplazamiento al rojo es

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = 0{,}0009$$

La fórmula del efecto Doppler no es aplicable al caso de un cuásar, pues es solamente válida para $v \ll c$. La fórmula a aplicar es

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

de donde se deduce

$$v = 0{,}888c$$

muy próximo a la velocidad de la luz. El desplazamiento al rojo será en este caso

$$z = \frac{5.000 - 1.216}{1.216} = 3{,}11$$

En Astrofísica, el ultravioleta puede hacerse visible.

Problema 8

Se mide el espectro global de una galaxia espiral y se observa que la raya $H\alpha$ a 6.563 Å tiene una anchura típica de 5 Å. Estimar el orden de magnitud de su velocidad de rotación.

Solución

El ensanchamiento de una raya espectral puede deberse a una serie de causas: agitación térmica (del gas o de las estrellas), turbulencia, rotación, etc. El ensanchamiento Doppler está relacionado con las variaciones internas de velocidad debidas a alguno de estos procesos, o a todos simultáneamente. En general

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_0}{c}\,\Delta v$$

siendo $\Delta\lambda$ el ensanchamiento de la raya, λ_0 la longitud de onda en reposo y Δv la dispersión de velocidades, que dependerá del proceso. Entonces

$$\Delta\lambda = 2{,}19 \times 10^{-2}\Delta v$$

fórmula adimensional que obliga a medir Δv en km/s y proporciona $\Delta\lambda$ en amstrongs. Así pues, $\Delta v \sim 228$ km/s.

Si se observa la raya en absorción, su anchura es atribuible, en general, a las estrellas con una temperatura efectiva de unos 5.000 K (ya veremos por qué). Tienen las estrellas una dispersión de velocidades, debida a su temperatura, de $\sqrt{3kT/m} \sim 11$ km/s. A este valor corresponde $\Delta\lambda = 0{,}24$ Å. Demasiado pequeño.

Se podría pensar en agitación térmica, no en el interior de las estrellas, sino originada por los movimientos peculiares de las estrellas, la agitación térmica debida a los movimientos de unas estrellas con respecto a las otras. En la vecindad del Sol, esta velocidad peculiar típica es de unos 20 km/s, con lo que $\Delta\lambda \sim 0{,}44$, aún insuficiente.

Probablemente, si podemos descartar y despreciar igualmente otras causas, el ensanchamiento se debe a la rotación. En este caso, una velocidad típica de rotación en esta galaxia sería del orden de 230 km s^{-1}.

> Debido a la íntima relación entre ν y λ impuesta por el efecto Doppler, la posición y anchura de las rayas espectrales se mide en ocasiones en km s^{-1}. También, en lugar de la intensidad específica (por unidad de frecuencia) se utiliza a veces la «temperatura de brillo», definida como $T_B = (\lambda^2/2k)I_\nu$. (Es la temperatura que tendría un cuerpo negro que tuviera una intensidad I_λ, en la aproximación Rayleigh-Jeans). T_B se mide en grados kelvin. No es extraño, en Radioastronomía especialmente, medir la intensidad específica en grados kelvin y, por tanto, la intensidad de una raya, $I = \int I_\lambda d\lambda$ en la peregrina unidad K km s^{-1}.

Problema 9

Encontrar la relación entre *M* y *L*, dos magnitudes evidentemente relacionadas.

Solución

Para el Sol $m = -26{,}78$ y M, o más bien la magnitud bolométrica (cuando se consideran todas las longitudes de onda) es 4,72.

Para un astro cualquiera

$$m = -2{,}5 \lg \frac{f}{f_0} = -2{,}5 \lg \frac{L}{4\pi r^2 f_0}$$

donde f es el flujo del astro y f_0 una constante.
Si estuviera a 10 pc

$$M = -2{,}5 \lg \frac{L}{4\pi 100 f_0}$$

Si el astro fuera el Sol

$$M_\odot = -2{,}5 \lg \frac{L_\odot}{4\pi 100 f_0}$$

Restando

$$M - M_\odot = -2{,}5 \lg \frac{L}{L_\odot}$$

luego

$$M = 4{,}72 - 2{,}5 \lg \frac{L}{L_\odot}$$

Problema 10

Probar que, de no ser por la extinción interestelar, el color de un astro es independiente de la distancia.

Solución

Con el filtro B

$$B = -2{,}5 \lg \frac{f_B}{f_{0B}} = -2{,}5 \lg \frac{L_B}{4\pi r^2 f_{0B}} = -2{,}5 \lg \frac{L_B}{f_{0B}} + 2{,}5 \lg (4\pi r^2)$$

f_B es el flujo recibido al emplear el filtro B, f_{0B} una constante. Igual para el filtro V

$$V = -2{,}5 \lg \frac{L_V}{f_{0V}} + 2{,}5 \lg (4\pi r^2)$$

$$B - V = -2{,}5 \lg \frac{L_B/f_{0B}}{L_V/f_{0V}}$$

independiente de la distancia. El color, como la intensidad, al ser independientes de la distancia (sólo si el espacio interestelar no modifica la señal) nos informan de los procesos físicos en la fuente. En la aproximación cuerpo negro, tanto I como $B - V$ son función exclusiva de la temperatura.

Problema 11

Vamos a ponernos morenos en la playa. ¿En qué fechas y horas debemos hacerlo?

Solución

Si $f(\infty)$ es el flujo del Sol antes de atravesar la atmósfera, $f(\chi = 0)$ el flujo recibido si estuviera en el cenit y $f(\chi)$ el flujo a una cierta distancia cenital χ

$$f(\chi = 0) = f(\infty) e^{-\kappa X_0}$$

$$f(\chi) = f(\infty) e^{-\kappa X_0 \sec \chi}$$

donde κ es el coeficiente de extinción y $X_0 = \int_0^\infty \rho dz$, siendo ρ la densidad y z la altura desde el suelo. X_0 es entonces la masa de atmósfera contenida en una columna de 1 cm^2 de base y altura infinita.

En visible $f(\chi = 0)/f(\infty) \cong 0{,}9$, con lo cual $\kappa X_0 \sim 0{,}01$.

Veamos en ultravioleta (aproximadamente a 2.000 Å), radiación bronceante. Si el «scattering» de Rayleigh es predominante

$$\frac{\kappa_{UV}}{\kappa_V} = \left(\frac{\lambda_V}{\kappa_{UV}}\right)^4 = \left(\frac{5}{2}\right)^4 = 40$$

(subíndice UV, ultravioleta; V, visible)

$$\kappa_{UV} X_0 \sim 40 \times 0{,}01 \sim 0{,}4$$

por lo que, en ultravioleta

$$\frac{f(\chi)}{f(\chi = 0)} = e^{-0{,}4(\sec \chi - 1)}$$

Con lo que elaboramos la siguiente tabla

χ	$f(\chi)/f(\chi = 0)$ *visible*	$f(\chi)/f(\chi = 0)$ *ultravioleta*
0	1	1
10	0,9998	0,994
20	0,9993	0,97
30	0,998	0,94
40	0,997	0,88
50	0,994	0,80
60	0,990	0,67
70	0,981	0,46
80	0,954	0,15

Vemos una gran diferencia entre el visible y el ultravioleta. Incluso a 80°, en el visible la luz solar es prácticamente la misma que si el Sol estuviera en el cenit. Cuando se va a poner, a sólo ya 10° sobre el horizonte, vemos casi tan perfectamente como a mediodía. En ultravioleta, la luz depende mucho del ángulo cenital. Su luz, y, por tanto, su capacidad de broncear, disminuye ya en un factor importante si $\chi \geq 60°$. Esto sólo considerando el «scattering» de Rayleigh. En la práctica el bronceado es lentísimo para $\chi \geq 45°$. Si nuestros ojos fueran sensibles al ultravioleta, sólo veríamos el Sol mucho después de su salida. Y en invierno no le veríamos nunca, o débilmente, a través de una densa capa de polvo. Se ve que algunos nórdicos, cuando vienen a broncearse a nuestras playas, no tienen ojos sensibles al ultravioleta.

Problema 12

Se observa una región de una galaxia y en el pixel correspondiente se obtiene magnitud 14. Se tiene 0,3″/pixel. ¿Cuál es la magnitud por arcsec² en ese punto?

Solución

Los detectores bidimensionales se dividen en «pixels» (del inglés «picture element»). Nos dicen en el problema, entonces, que el ángulo sólido de observación es de 0,3″ × 0,3″ = 0,09 arcsec². La relación entre m y μ (magnitud por segundo de arco al cuadrado) será

$$m = -2{,}5 \lg \frac{f}{f_0} = -2{,}5 \lg \frac{IA}{f_0} = -2{,}5 \lg \frac{I}{f_0} - 2{,}5 \lg A =$$

$$= \mu - 2{,}5 \lg A$$

f es el flujo recibido en un ángulo sólido A, flujo al que corresponde la magnitud m. I es la intensidad y μ la mag arcsec^{-2} correspondiente.

En nuestro caso, $m = 14$, $A = 0{,}09$, luego

$$\mu = m + 2{,}5 \lg A = 14 + 2{,}5 \lg 0{,}09 \quad 11{,}39 \text{ mag arcsec}^{-2}$$

Problema 13

Se pretende detectar sistemas astrofísicos a temperatura 10, 10^3, 10^5 y 10^7 K. ¿Qué instrumento de observación habría que elegir?

Solución

Según la ley del corrimiento de Wien

$$\lambda_{\text{máx}} T = 1{,}3 \text{ cm K}$$

donde $\lambda_{\text{máx}}$ es la longitud de onda del máximo de emisión en la curva del cuerpo negro.

$T = 10$ K, $\lambda_{\text{máx}} \sim 0{,}1$ cm. Habría que utilizar un radiotelescopio de ondas milimétricas.

$T = 10^3$ K, $\lambda_{\text{máx}} \sim 10^3$ cm $\sim 10\ \mu$. Telescopio terrestre de infrarrojo cercano.

$T = 10^5$ K, $\lambda_{\text{máx}} \sim 10^{-5}$ cm $\sim 10^3$ Å. Telescopio de radiación ultravioleta a bordo de vehículo espacial.

$T = 10^7$ K, $\lambda_{\text{máx}} \sim 10^{-7}$ cm ~ 10 Å $\sim 1{,}38 \times 10^{-9}$ erg $\sim$ ~ 1 keV. Telescopio de rayos X a bordo de vehículo espacial.

Problema 14

Sabiendo el poder de resolución angular del ojo humano, encontrar un método de determinación de distancias, cuando objetos de distinto tamaño están en el límite de detectabilidad.

Solución

La resolución angular de un telescopio viene limitada por la difracción que producen sus bordes, de forma que la imagen de un punto acaba teniendo un ensanchamiento angular del orden de λ/D, siendo λ la longitud de onda y D el diámetro de abertura del telescopio.

El ojo humano tiene también esta limitación. Supongamos que la pupila es de ~2 mm. Observando la luz a 5.000 Å tendremos

$$\alpha = \frac{1}{D} = \frac{5.000\ \text{Å}}{2\ \text{mm}} = 2{,}5 \times 10^{-4}\ \text{radianes} = 51\ \text{arcsec} \sim 1\ \text{arcmin}$$

Nuestro ojo tiene este poder de resolución. No podemos distinguir diferencias en ángulos inferiores a 1′. Este ángulo es admirablemente pequeño. El poder de resolución del ojo es superior al del radiotelescopio de Arecibo con sus 300 m de abertura.

Imaginemos que queremos saber a qué distancia está una persona cuando a duras penas apreciamos que es una persona, en el límite de detectabilidad: si estuviera más lejos no la apreciaríamos

$$\tan \alpha \sim \alpha = \text{tamaño/distancia}$$

luego

$$\text{distancia} = \text{tamaño} \times \frac{1}{2{,}5 \times 10^{-4}} = 4.000 \times \text{tamaño}$$

Si una persona tiene 1 m (en orden de magnitud) se la puede apreciar a < 4 km.

Si se trata de una gallina, de ~0,25 m, se la aprecia a < 1 km.

A un coche, de ~3 m, se le aprecia a < 12 km.

A una casa, de ~10 m, se la aprecia a < 40 km.

Así podemos calcular distancias, a ojo de buen cubero, según los objetos de tamaño conocido que sean casi inapreciables. Cierto que no todos los observadores tienen la misma agudeza, pero una calibración individual permite una estimación, aunque grosera, útil.

Problema 15

Eratóstenes dedujo el radio de la Tierra, observando las sombras en Alejandría y en un punto donde el Sol incidía verticalmente en el solsticio de verano (en el trópico de Cáncer). Para medir la distancia entre ambos puntos, fue informado del número de días empleados por una caravana de camellos. Hay un error inevitable en el método, debido a que la caravana, al tardar varios días, facilitaba la comparación de sombras en días distintos. ¿Podría estimar este error?

Solución

Este problema requiere conocimientos elementales de Astronomía de Posición, por lo que puede hacerse tras el problema 27. Les situamos en esta posición por afectar al cálculo de distancias.

Esta medida de Eratóstenes fue decisiva en Astrofísica. La determinación de distancias en Astrofísica se ha comparado a una escalera. Un método de medir distancias en cierto rango, se convierte en el escalón de apoyo para establecer distancias en un rango superior. Pues bien, el primer peldaño es la determinación del tamaño de la Tierra.

El arco es el radio por el ángulo. No hay más que medir el arco y el ángulo para determinar el radio de la Tierra, supuesta esférica. En Alejandría ($\varphi = 31°$), en el solsticio de verano, la distancia cenital del Sol a mediodía es $31 - 23°27' \approx 8°$. En general, sería la latitud, φ, menos la declinación del Sol $\delta_{\odot}$. Pero en el solsticio de verano $\delta_{\odot} = i$, siendo i la inclinación de la eclíptica, igual a $23°27'$. Para ver mejor cómo se hace este cálculo véase el problema 27. En el trópico de Cáncer, en estas circunstancias, la distancia cenital del Sol es 0°, evidentemente.

Hoy sabemos que el radio de la Tierra es ~6.300 km, luego la distancia entre Alejandría y el trópico de Cáncer sabemos que es

$$\text{arco} = 6.300 \times \frac{8° \times 2\pi}{360} = 880 \text{ km}$$

Suponiendo que la Caravana puede hacer 50 km diarios, se necesitan unos 18 días, seguramente más. Entonces, o partieron en el solsticio y llegaron 18 días después, o lo que es más probable, salieron 18 días antes y llegaron en el solsticio. Cuando partieron, pues, $\delta_\odot \neq i$. Afortunadamente, en torno al solsticio, $\delta_\odot$ varía muy poco. Si la caravana partió el 5 de junio (nuestro), entonces era $\delta_\odot = 22°$ como puede apreciarse en la tabla 1 (véase p. 44), en lugar de 23°27′. Un error de 1,5° en el ángulo implica un error en el radio. El día 5 de junio, $\chi_\odot = \varphi - \delta_\odot = 31 - 22 = 9°$. Con lo que hubiera obtenido un radio de

$$R = \frac{880 \times 360}{9 \times 2\pi} = 5.602 \text{ km}$$

Es un error de ~5.600 – 6.300 ~ 700 km, imputable a la lentitud de los camellos. Seguramente, el ritmo irregular de los camellos introdujo mayores errores.

Problema 16

Estamos en un puerto de mar. Un barco parte y, al poco rato, sólo se le ven los mástiles. Estime el radio de la Tierra.

Solución

Sea h la altura de los mástiles y R el radio de la Tierra. La distancia recorrida por el barco es aproximadamente x, puesto que es pequeña comparada con las dimensiones de la Tierra.

h puede ser 10 m; x puede ser 10 km. Según la figura 2

$$R^2 + x^2 = (R + h)^2$$

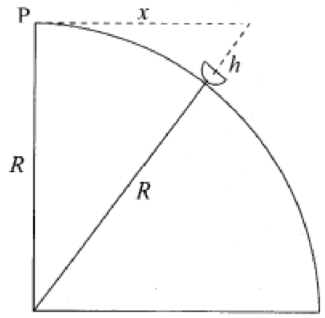

Figura 2

es decir

$$R = \frac{x^2 - h^2}{2h} = \frac{10^8 - 10^2}{2 \times 10}\, m \approx 5 \times 10^6 \text{ m} \approx 5.000 \text{ km}$$

El radio es 6.378 km. El error fue considerable pero sólo pretendíamos obtener un orden de magnitud.

Problema 17

Encontrar un orden de magnitud de la distancia a las estrellas visibles a simple vista, apreciando que su luz es comparable a la luz cenicienta de la Luna.

Solución

Este problema es resuelto en *Física de las noches estrelladas* por unos campesinos sin instrucción. Llamemos $R_L = 1{,}7 \times 10^8$ cm al radio de la Luna; $R_T = 6{,}3 \times 10^8$ cm al radio de la Tierra; $r_S = 1{,}5 \times 10^{13}$ cm a la distancia al Sol, tanto desde la Tierra como desde la Luna; $r_L = 3{,}8 \times 10^{10}$ cm a la distancia a la Luna.

Si la luz del Sol, que es una estrella cualquiera, fuera comparable a la de una estrella, el problema sería sencillo, pero no lo es a simple vista, sin aparatos. Empleamos entonces la luz cenicienta como forma de reducir la luz del Sol en un factor conocido. En efecto, la luz cenicienta de la Luna no es otra cosa que el reflejo de la terrestre en la Luna, teniendo en cuenta que la terrestre es la del Sol reflejada en nuestro planeta. La luz del Sol, pues, llega a la Tierra, va a la Luna y vuelve a la Tierra.

El flujo que del Sol llega a la Tierra es $L_{\odot}/4\pi r_S^2$. La luminosidad de la Tierra será el flujo multiplicado por la superficie iluminada $\sim\pi R_T^2$, reducida en un factor ~ 10, porque la Tierra no es un espejo perfecto.

Para calcular el flujo que llega a la Luna dividimos por $1/4\pi r_L^2$, luego la luminosidad de la luz cenicienta se obtendrá multiplicando por la superficie iluminada por la Luna $\sim 4\pi R_L^2$, nuevamente dividiendo por ~ 10 por no ser la Luna un espejo perfecto. Esta luminosidad cenicienta produce un flujo en la Tierra que se obtiene dividiendo por $4\pi r_L^2$.

Este flujo es del orden del que se recibe de una estrella que, si es similar al Sol, será $L_{\odot}/4\pi r_*^2$, siendo r_* una distancia típica a una estrella, precisamente lo que queremos estimar. Por tanto

$$\frac{L_{\odot}}{4\pi r_S^2}\,\pi R_T^2\,\frac{1}{10}\,\frac{1}{4\pi r_L^2}\,\pi R_L^2\,\frac{1}{10}\,\frac{1}{4\pi r_L^2} = \frac{L_{\odot}}{4\pi r_*^2}$$

luego

$$r_* = \frac{40 r_S r_L^2}{R_T R_L} = 8 \times 10^{18}\ \text{cm} \approx 2{,}5\ \text{pc}$$

Dado la sencillez observacional, el resultado no ha podido ser más preciso.

Problema 18

Un método de determinación de distancias está basado en que las trayectorias de las estrellas de un cúmulo abierto convergen en un punto del cielo. Una de las estrellas del cúmulo tiene una posición que forma un ángulo de $\varphi = 55°$ con respecto al punto de convergencia. Su velocidad radial es $v_r = 100$ kms^{-1} y su movimiento propio de $\mu = 1$ arcsec/año. ¿A qué distancia está?

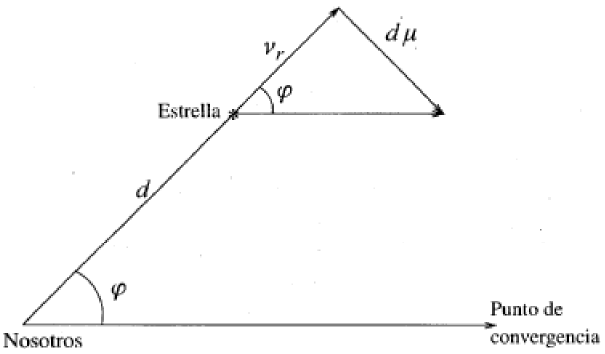

Figura 3

Solución

En la figura 3 se ve que

$$\tan \varphi = \frac{\mu d}{v_r}$$

o, en expresión no homogénea

$$\tan \varphi = 4{,}85 \, \frac{\mu d}{v_r}$$

donde d se mide en pc, μ en arcsec/año y v_r en km/s

$$d = \frac{v_r \tan \varphi}{4{,}85\mu} = \frac{100 \times 1{,}43}{4{,}85 \times 1} = 29{,}5 \text{ pc}$$

El método mejora estadísticamente cuando este cálculo se repite para todas las estrellas del cúmulo.

Problema 19

Una galaxia espiral tiene $m = 11{,}16$ y la anchura de su raya en 21 cm es de $W = 218$ km/s. La inclinación es $i = 45°$. ¿Cuál es su distancia?

Solución

Se trata de la aplicación de la relación de Tully-Fisher, que liga la magnitud absoluta M con la anchura de la raya en 21 cm. Como esta anchura es observacional, tenemos un método muy valioso de cálculo de distancias

$$M = c_1 \lg \left(\frac{W}{\sin i} \right) + c_2$$

donde $c_1 \sim -5{,}90$ y $c_2 \sim -4{,}39$. Esta fórmula es adimensional, lo que obliga a adoptar una determinada unidad para W, siendo ésta el km/s. Tenemos

$$M = -19{,}07$$

Ahora, con

$$M = m - 5(\lg r - 1)$$

donde r ha de medirse en pc, obtenemos

$$r = 1{,}11 \times 10^7 \text{ pc} \sim 11M \text{ pc}$$

Es interesante expresar la relación de Tully-Fisher, no solamente en esta forma de cómoda aplicación observacional, sino además de la forma de mejor interpretación teórica, como una relación entre la luminosidad absoluta L y la velocidad de rotación θ.

Tendríamos

$$4{,}72 - 2{,}5 \lg \frac{L}{L_{\odot}} = c_1 \lg W + c_2$$

(con $i = 90°$). De aquí deducimos, como $W \sim 2\theta$

$$L^{2,5}\theta^{c_1} = \text{cte}$$

o bien

$$\mathrm{L} \propto \theta^{-c_1/2,5} = \theta^{5,9/2,5} = \theta^{2,36}$$

es decir

$$\mathrm{L} \propto \theta^{2,36}$$

La relación de Tully-Fisher en infrarrojo y cuando se añaden a la muestra galaxias de baja luminosidad parece tener más bien la forma

$$L \propto \theta^4$$

Problema 20

Se encuentra que una cefeida tiene V = 14,30 y B = 15,00, siendo su período de 8 días. ¿A qué distancia está?

Solución

La relación entre magnitud absoluta M_V, período P y color $B - V$, es del tipo

$$M_V = c_1 + c_2 \lg P + c_3(B - V)$$

siendo $c_1 = -2{,}61$, $c_2 = -3{,}76$ y $c_3 = 2{,}60$. El período ha de expresarse en días. Al permitir el cálculo de la magnitud absoluta, esta relación proporciona un conocido método de cálculo de distancias.

Por tanto, $M_V = -4{,}19$. Como

$$M_V = V - 5(\lg r - 1)$$

obtenemos $r = 5 \times 10^4$ pc. Es posible que estemos observando la Nube Mayor de Magallanes. Precisamente, con las cefeidas de esta galaxia enana satélite de la Vía Láctea, todas ellas prácticamente a la misma distancia, se encontró la fórmula que relacionaba la magnitud absoluta y el período, de tanta trascendencia en el desarrollo de la Astrofísica.

> Recordemos la breve, pero importante para nuestra historia, descripción de Pigaffeta en su «Primer viaje alrededor del globo», relatando la expedición de Magallanes y Elcano:
>
> «El Polo Antártico no goza de las mismas constelaciones que el Ártico, viéndose en él dos grupos de pequeñas estrellas nebulosas que parecen nubecillas, a poca distancia una de otra.»
>
> ¡Si hubiera sabido Pigaffeta la atención científica de que serían objeto aquellas nubecillas, en realidad galaxias satélites de la nuestra!

Problema 21

¿A qué distancia del Sol, el aumento en magnitud debido a la extinción es igual al debido a la pérdida de flujo por lejanía?

Solución

$$M = m + 5 - 5 \lg r - Cr$$

(M, magnitud absoluta; m, magnitud; r, distancia en parsecs). En el visible, la constante C viene a ser de 1 mag/kpc. El efecto de la pérdida de flujo por lejanía, según r^{-2}, viene representado por $5 \lg r$, mientras que el efecto de la extinción, por Cr. Cuando ambos sean igualmente importantes

$$5 \lg r = \frac{r}{1.000}$$