Martin Gardner

El ahorcamiento inesperado y otros entretenimientos matemáticos

Alianza editorial
El libro de bolsillo

Título original: *The Unexpected Hanging and Other Mathematical Diversions*
Traductor: Gonzalo del Puerto y Gil

Primera edición: 1991
Segunda edición: 2018

Diseño de colección: Estudio de Manuel Estrada con la colaboración de Roberto Turégano y Lynda Bozarth
Diseño de cubierta: Manuel Estrada

Calle Juan Ignacio Luca de Tena, 15
28027 Madrid
www.alianzaeditorial.es

ISBN: 978-84-9181-227-2
Depósito legal: M. 19.203-2018
Printed in Spain

Si quiere recibir información periódica sobre las novedades de Alianza Editorial, envíe un correo electrónico a la dirección: alianzaeditorial@anaya.es

Índice

A mi nieta
Dorothy Elise Weaver

Introducción

Piet Hein, cuyas invenciones en el terreno de las matemáticas recreativas ha suministrado tantas veces material para mi columna de *Scientific American,* «Juegos matemáticos», es más conocido en Dinamarca, su tierra natal, como autor de una serie enormemente popular y aparentemente inacabable de libros de poemillas epigramáticos que llama *grooks,* encantadoramente escritos, agudos y llenos de la sabiduría de un hombre que se siente tan en casa en la ciencia y la matemática como en la política y en las artes liberales. En el primero de sus libros de recopilación de poemas en inglés (Cambridge, Massachusetts: M. I. T. Press, 1966) aparece el siguiente *grook:*

> Tomar la diversión
>   como simple diversión
> y la seriedad
>   en serio

muestra cuán profundamente
indiscernibles
resultan ambas entre sí.

No se me ocurre un modo más conciso de expresar el punto de vista desde el que están escritos los capítulos de este libro. Enfoco la matemática con espíritu de diversión, pero combinando con la diversión un esfuerzo serio de llevar al lector hacia áreas de la matemática que son cualquier cosa excepto triviales; áreas que están jugando un papel esencial en la revolución tecnológica que de forma tan explosiva está cambiando la historia y transformando nuestra vida cotidiana.

Este es el quinto libro de la editorial Simón and Schuster en el que se recogen mis columnas de *Scientific American* (incluido un librito, *Los mágicos números del Doctor Matrix,* que apareció en 1967). Como en el caso de las recopilaciones anteriores, he ampliado cada columna en parte con material que he encontrado desde que se escribió, en parte con material que me envían mis leales lectores. Al final del libro se encontrará una selección de referencias bibliográficas para cada capítulo (con excepción de aquellos capítulos de acertijos cortos no relacionados entre sí) que suministrarán más información al lector sobre los asuntos tratados.

Cada año, según crece mi correspondencia sobre la columna, va resultando progresivamente más difícil responder a todas las cartas en la medida en la que me gustaría hacerlo. Quizá sea esta una buena oportunidad de mencionar tres tipos de cartas a las que no puedo responder:

1. No tengo ni tiempo ni competencia para proporcionar evaluaciones de pruebas de problemas sin resolver tan famosas como el teorema del mapa de cuatro colores, el último teorema de Fermat, y otros, o la búsqueda de errores en las trisecciones del ángulo, la cuadratura del círculo y las duplicaciones del cubo.

2. No tengo ni el tiempo, ni a menudo la competencia, para proporcionar bibliografía y sugerencias para elaborar proyectos matemáticos para festivales científicos a alumnos de bachillerato, o para dar respuesta a problemas matemáticos difíciles que les han puesto sus profesores.

3. Las cartas para mí son abiertas en las oficinas de *Scientific American* y se me envían en lotes semanales sin sus sobres originales. No me es posible responder a los lectores que no ponen su dirección en la carta o que la ponen escrita a mano ilegiblemente.

Con todo, no quiero dar la impresión de que no me debo a los miles de lectores devotos de todo el mundo que se toman el tiempo de señalar errores o de información de aspectos inusuales que no he incluido en muchos casos porque no sabía de ellos. Trato de responder cuantas cartas puedo –si las respondiese *todas* no tendría tiempo para otra cosa– pero si no lo hago así, que no se piense que no se leyó la carta o que no estoy agradecido por recibirla.

Martin Gardner

1. La paradoja del ahorcamiento inesperado

«Ha salido a la luz una nueva y poderosa paradoja». Esta es la frase inicial de un artículo, auténtico rompecabezas, de Michael Scriven, que apareció en la edición de julio de 1951 de la revista británica de filosofía *Mind.* Scriven, que ostenta el título de «catedrático de lógica de la ciencia» en la Universidad de Indiana, es un hombre cuya opinión en tales asuntos no puede tomarse a la ligera. Que la paradoja es realmente poderosa lo confirma el hecho de que hayan aparecido más de veinte artículos sobre ella en revistas eruditas. Los autores, muchos de los cuales son distinguidos filósofos, no se ponen de acuerdo en sus intentos de resolver la paradoja. Puesto que no se ha llegado a un consenso, la paradoja es todavía un tema muy polémico.

No se sabe quién fue el primero a quien se le ocurrió. De acuerdo con el lógico W. V. Quine, de la Universidad de Harvard, quien escribió uno de los artículos (y discutió sobre paradojas en *Scientific American* en abril de 1962), la paradoja circuló por primera vez oralmente a principios de los años cuarenta. Tomaba a menudo la forma de un acertijo sobre un hombre condenado a la horca.

Se sentenciaba al hombre en sábado.

–El ahorcamiento tendrá lugar a mediodía –dijo el juez al prisionero–, uno de los siete días de la semana próxima. Pero no sabrás qué día será hasta que no se te informe de ello la mañana del día del ahorcamiento.

El juez era conocido por ser una persona que siempre mantenía su palabra. El prisionero, acompañado por su abogado, volvió a la celda. Tan pronto como los dos hombres quedaron solos el abogado se puso a sonreír.

–¿Te das cuenta? –exclamó–. No es posible llevar a efecto la sentencia del juez.

–No lo entiendo –dijo el prisionero.

–Deja que te explique. Obviamente, no pueden ahorcarte el próximo sábado. El sábado es el último día de la semana. La tarde del viernes estarías aún con vida y sabrías con absoluta certeza que el ahorcamiento tendría lugar el sábado. Sabrías esto antes de que se te comunicase el sábado por la mañana. Esto violaría la sentencia del juez.

–Cierto –dijo el prisionero.

–Por tanto el sábado está totalmente descartado –prosiguió el abogado–. Esto hace que el viernes sea el último día en que pueden ahorcarte. Pero no pueden ahorcarte el viernes porque el jueves por la tarde quedarían solo dos días: viernes y sábado. Puesto que el sábado no podría ser, el ahorcamiento tendría que ser el viernes. Saber

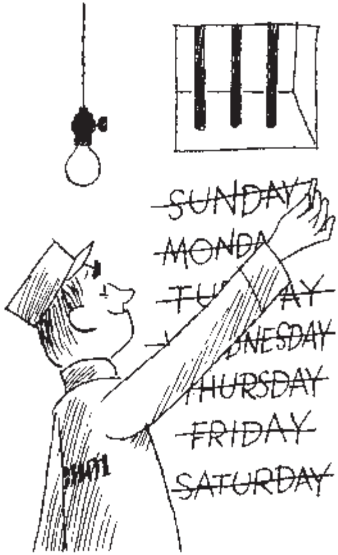

Figura 1. El prisionero elimina todos los días posibles.

esto volvería a violar la sentencia del juez. Así el viernes queda eliminado. Esto nos deja el jueves como último día posible. Pero el jueves está descartado porque si estás vivo el miércoles por la tarde sabrás que el jueves será el día.

–Entiendo –dijo el prisionero, que empezaba a sentirse mucho mejor–. Exactamente del mismo modo puedo descartar el miércoles, el martes y el lunes. Eso deja mañana solamente. ¡Pero no pueden ahorcarme mañana porque lo sé hoy!

En pocas palabras, la sentencia del juez parece autorrefutarse. No hay nada lógicamente contradictorio en las dos afirmaciones que forman la sentencia; sin embargo, no puede llevarse a cabo en la práctica. Así es como apareció la paradoja a Donald John O'Connor, filósofo de la universidad de Exeter, que fue el primero en discutirla por escrito *(Mind,* julio 1948). La versión de O'Connor de la paradoja se refería a un comandante que anunció que habría un apagón de Clase A en la semana siguiente. Definió entonces un apagón de Clase A como aquel que los participantes no podrían saber que iba a suceder hasta después de las 6 p. m. del día en que tenía que ocurrir.

–Es fácil ver –escribía O'Connor–, que se sigue del enunciado de esta definición que el ejercicio no puede en absoluto tener lugar.

Es decir, no puede tener lugar sin violar la definición. Opiniones semejantes expresan los autores de los dos artículos siguientes (L. Jonathan Cohen en el *Mind* de enero de 1950 y Peter Alexander en el *Mind* de octubre de 1950), y aún George Gamow y Marvin Stern cuando más tarde incluyeron la paradoja (en la forma de hombre-que-espera-ser-ahorcado) en su libro *Puzzle Math* (Nueva York: Viking, 1958).

Ahora bien, si esto fuese todo en relación a la paradoja, se podría estar de acuerdo con O'Connor en que se trata de algo «bastante frívolo». Pero, tal como Scriven fue el primero en señalar, no es en modo alguno frívolo y por una razón que escapó por completo a los tres primeros autores. Para aclarar este punto vamos a volver al hombre en la celda. Está convencido, por lo que parece ser una lógica impecable, de que no puede ser ahorcado sin contradecir las condiciones que se especificaban en su condena. Sin embargo, el jueves por la mañana, para gran sorpresa suya, llega el verdugo. Está claro que no le esperaba. Lo que es más sorprendente, la sentencia del juez parece ser ahora perfectamente correcta. La condena puede llevarse a cabo tal y como se había dictado.

> Pienso que este gusto a lógica refutada por el mundo hace bastante atractiva a la paradoja –anota Scriven–. Patéticamente, el lógico sigue correctamente los pasos que han hecho siempre que el conjuro funcione, pero por alguna razón el monstruo, la Realidad, no comprende y continúa avanzando.

Con el propósito de expresar más claramente las dificultades lingüísticas reales y profundas aquí implicadas haríamos bien en reformular la paradoja en dos formas equivalentes. Haciendo esto podemos eliminar varios factores irrelevantes que se arguyen a menudo y que oscurecen el asunto, tales como la posibilidad de que el juez cambie de opinión, de que la muerte del prisionero se produzca antes de que el ahorcamiento tenga lugar, y así sucesivamente.

La primera variante de la paradoja, sacada del artículo de Scriven, puede llamarse la paradoja del huevo inesperado.

Imagina que tienes ante ti diez cajas marcadas del 1 al 10. Mientras estás de espaldas un amigo esconde un huevo en una de las cajas. Te das la vuelta.

–Quiero que abras estas cajas una por una –te dice– por orden serial. Dentro de una de ellas te garantizo que encontrarás inesperadamente un huevo. Por «inesperado» quiero decir que no serás capaz de deducir en qué caja está hasta que abras la caja y lo veas.

Suponiendo que tu amigo es de toda confianza en todo cuanto dice, ¿puede cumplirse su predicción? Aparentemente, no. Obviamente no pondrá un huevo en la caja 10, porque después de haber encontrado vacías las primeras nueve cajas serás capaz de deducir con certidumbre que el huevo está en la única caja que queda. Esto contradiría la afirmación de tu amigo. La caja 10 está descartada. Ahora considera la situación que se daría si fuera tan tonto de poner el huevo en la caja 9. Encuentras las ocho primeras cajas vacías. Solo quedan la 9 y la 10. El huevo no puede estar en la caja 10. Ergo tiene que estar en la 9. Abres la 9. Con toda seguridad está ahí. Está claro que es un huevo «esperado», y así se prueba de nuevo que tu amigo está equivocado. La caja 9 está descartada. Pero ahora has comenzado a deslizarte hacia

Figura 2. Paradoja del huevo inesperado.

la irrealidad. La caja 8 puede ser descartada precisamente por el mismo argumento lógico, y de igual forma las cajas 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. Confiado en que todas las cajas están vacías empiezas a abrirlas. ¿Qué tenemos en la caja 5? ¡Un huevo totalmente inesperado! Después de todo la predicción de tu amigo se ha cumplido. ¿Dónde falló tu razonamiento?

Para agudizar la paradoja aún más podemos considerarla de una tercera forma, que puede llamarse la paradoja de la pica inesperada. Imagina que estás sentado en una mesa de juego frente a un amigo que te muestra en su mano las trece picas. Las baraja, las reparte con las caras hacia él y separa una sola carta boca abajo. Se te pide que nombres lentamente las trece picas, empezando por el as y terminando por el rey. Cada vez que falles al nombrar la carta de la mesa dirá «no». Cuando nombres la carta correctamente, dirá «sí».

–Apuesto mil dólares contra diez centavos –dice–, a que no eres capaz de deducir cuál es esta carta antes de que yo te responda «sí».

Suponiendo que tu amigo haga lo que pueda para no perder su dinero, *¿es* posible que haya colocado el rey de picas en la mesa? Obviamente, no. Después de nombrar las primeras doce picas solo quedará el rey de picas. Serás capaz de deducir la identidad de la carta con toda confianza. ¿Puede ser una reina? No, porque después de haber nombrado el comodín solo quedan el rey y la reina. No puede ser el rey, así que tiene que ser la reina. Nuevamente tu deducción correcta te haría ganar 1.000 dólares. El mismo razonamiento elimina todas las cartas restantes. Sin tener en cuenta de qué carta se trata, anti-

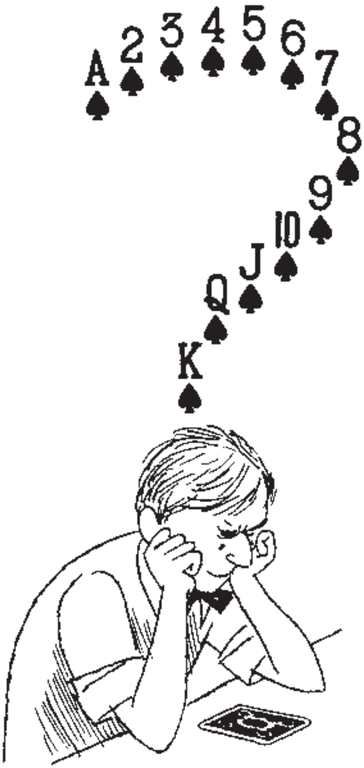

Figura 3. Paradoja de la pica inesperada.

cipadamente serías capaz de deducir cuál es. La lógica parece impecable. Sin embargo, es igualmente obvio que, mientras miras fijamente la espalda de la carta, ¡no tienes ni la menor idea de qué pica se trata!

Aun si la paradoja se simplifica reduciéndola a dos días, dos cajas, dos cartas, hay algo muy peculiar que sigue entorpeciendo la situación. Supón que tu amigo coge sólo el as y el dos de picas. Es verdad que podrás cobrar tu apuesta si la carta es el dos. Una vez que hayas nombrado el as y lo hayas eliminado podrás decir: «Deduzco que es un dos». La deducción se basa, por supuesto, en la verdad de la afirmación: «la carta que está ante mí es o bien el as o bien el dos de picas». (Todos damos por descontado, en las tres paradojas, que el hombre «será» ahorcado, que «hay» un huevo en una de las cajas, que las cartas «son» las cartas designadas.) Esta es una deducción tan potente como la que cualquier mortal podría nunca hacer sobre un hecho natural. Tienes, por tanto, el mayor de los derechos a los 1.000 dólares.

Supón, con todo, que tu amigo destapa el as de picas. ¿No podías deducir al principio que la carta era un as? Ciertamente él no arriesgaría sus 1.000 dólares destapando un dos. Por tanto *tiene* que ser el as. Expresas tu convicción de que lo es. El dice «sí». ¿Puedes pretender legítimamente haber ganado la apuesta?

Curiosamente, no puedes. Y aquí hemos llegado al meollo del misterio. Tu deducción previa se basaba solamente en la premisa de que la carta o era un as o era un dos. La carta no es el as; por tanto es el dos. Pero ahora tu premisa se basa en la misma premisa que antes más una adicional, esto es, la suposición de que tu amigo decía la verdad; para decir lo mismo en términos pragmáticos, sobre la suposición de que él hará todo lo posible para evitar pagarte 1.000 dólares. Pero si te es posible deducir que la carta es un as, él perderá su dinero con tanta seguridad como si hubiese destapado el dos. Puesto que pierde en ambos casos, no tiene base racional para coger una carta en lugar de la otra. Una vez que te das cuenta de esto, tu deducción de que la carta es un as resulta tener un carácter extremadamente débil. Es verdad que harías bien en apostar a que es un as, porque probablemente lo es, pero para ganar la apuesta tienes que hacer más que eso: tienes que probar que has deducido la carta con lógica de hierro. Esto es algo que no puedes hacer.

De hecho estás atrapado en un círculo vicioso de contradicciones. Primero supones que su predicción se cumplirá. Sobre esta base deduces que la carta que está sobre la mesa es el as. Pero si es un as la predicción es falseada. Si no se puede confiar en su predicción, no se te deja base racional alguna para deducir el nombre de la carta. Y si no puedes deducir el nombre de la carta se confirmará ciertamente su predicción. Ahora has vuelto justamente a donde empezaste. El círculo entero comienza otra vez. En este sentido la situación es análoga a la de la circularidad viciosa implicada en una famosa tarjeta paradójica planteada por vez primera por el matemático inglés P. E. B. Jourdain en 1913 (Figura 4). Puesto que este tipo de razonamiento no te lleva más allá de lo que le lleva a un perro perseguirse el rabo, no tienes forma lógica de determinar el nombre de la carta sobre la mesa. Por supuesto puedes *adivinar.* Conociendo a tu amigo puedes decidir que es muy probable que haya puesto el as. Pero ningún lógico que se aprecie estaría de acuerdo en que has «deducido» la carta incluyendo algo próximo a la certidumbre lógica cuando dedujiste que era el dos.

La endeblez de tu razonamiento puede quizá verse más claramente si vuelves a las 10 cajas.

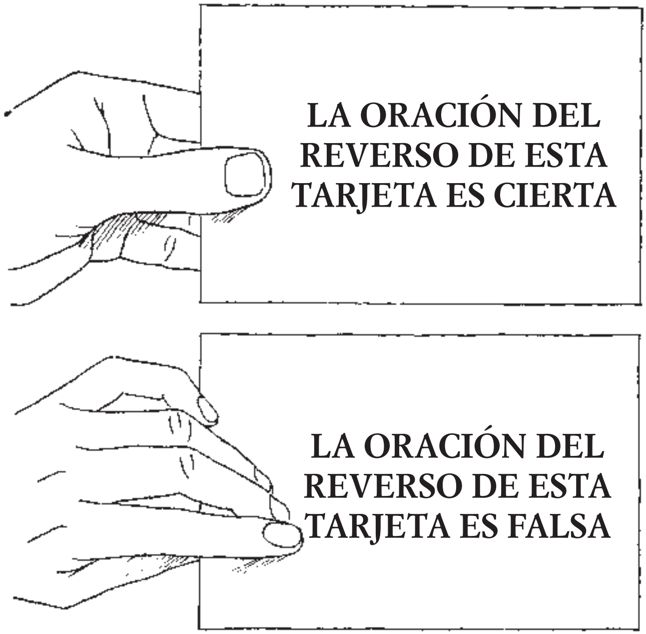

Figura 4. Paradoja de la tarjeta de P. E. B. Jourdain.

Al comienzo «deduces» que el huevo está en la caja 1, pero la caja 1 está vacía. «Deduces» entonces que está en la caja 2, pero la caja 2 está vacía también. Entonces «deduces» que en la caja 3 y así sucesivamente. (¡Es casi como si el huevo, justo antes de que mires en cada una de las cajas en las que estás seguro de que tiene que estar, fuese astutamente transportado por medio de trampillas secretas que diesen a cajas con un número más alto!) Finalmente encuentras el huevo «esperado» en la caja 8.