

MORRIS KLINE

EL PENSAMIENTO
MATEMÁTICO

DE LA ANTIGÜEDAD
A NUESTROS DÍAS

ALIANZA EDITORIAL

Título original: *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, First Edition*

Esta obra fue publicada originalmente en inglés en 1972. Esta traducción ha sido publicada por acuerdo con Oxford University Press. Alianza Editorial es la única responsable de la traducción de la obra original y Oxford University Press no se hará cargo de ningún error, omisión, imprecisión o ambigüedad en dicha traducción ni de cualquier problema derivado de la misma.

Versión de Alfonso Casal, Carlos Fernández, Alejandro Ricardo
Garciadiego Dantan, Mariano Martínez y Juan Tarrés
Coordinación y revisión: Jesús Hernández

Primera edición: 2012
Primera reimpresión: 2016

Reservados todos los derechos. El contenido de esta obra está protegido por la Ley, que establece penas de prisión y/o multas, además de las correspondientes indemnizaciones por daños y perjuicios, para quienes reprodujeren, plagiaran, distribuyeren o comunicaren públicamente, en todo o en parte, una obra literaria, artística o científica, o su transformación, interpretación o ejecución artística fijada en cualquier tipo de soporte o comunicada a través de cualquier medio, sin la preceptiva autorización.

Copyright © 1972 Morris Kline
© Alianza Editorial, S. A., Madrid, 2012, 2016
Calle Juan Ignacio Luca de Tena, 15; 28027 Madrid
www.alianzaeditorial.es
ISBN: 978-84-206-6965-6
Depósito legal: M. 10.380-2012

SI QUIERE RECIBIR INFORMACIÓN PERIÓDICA SOBRE LAS NOVEDADES DE
ALIANZA EDITORIAL, ENVÍE UN CORREO ELECTRÓNICO A LA DIRECCIÓN:
alianzaeditorial@anaya.es

INDICE

PRÓLOGO.....	13
1. LA MATEMÁTICA EN MESOPOTAMIA	18
1. ¿Dónde tuvo su origen la matemática?, 18.—2. La historia política de Mesopotamia, 19.—3. Los símbolos numéricos, 21.—4. Las operaciones aritméticas, 24.—5. El álgebra babilónica, 26.—6. La geometría babilónica, 29.—7. Aplicaciones de la matemática en Babilonia, 30.—8. Evaluación global de la matemática babilónica, 33.—Bibliografía, 34.	
2. LA MATEMÁTICA EGIPCIA	35
1. El marco histórico, 35.—2. La aritmética, 37.—3. Álgebra y geometría, 41.—4. Aplicaciones de la matemática egipcia, 43.—Resumen, 45.—Bibliografía, 46.	
3. LOS ORÍGENES DE LA MATEMÁTICA CLÁSICA GRIEGA ..	47
1. El marco histórico, 47.—2. Las fuentes generales, 49.—3. Las escuelas principales del período clásico, 51.—4. La escuela jónica, 52.—5. Los pitagóricos, 53.—6. La escuela eleática, 61.—7. Los sofistas, 65.—8. La escuela platónica, 71.—9. La escuela de Eudoxo, 79.—10. Aristóteles y su escuela, 83.—Bibliografía, 86.	
4. EUCLIDES Y APOLONIO	88
1. Introducción, 88.—2. El marco de los <i>Elementos</i> de Euclides,	

- 89.—3. Las definiciones y axiomas de los *Elementos*, 90.—4. Los libros I a IV de los *Elementos*, 93.—5. El libro V: La teoría de proporciones, 103.—6. El libro VI: Figuras semejantes, 109.—7. Los libros VII, VIII y IX: La teoría de números, 114.—8. El libro X: La clasificación de los inconmensurables, 118.—9. Los libros XI, XII y XIII: Geometría de sólidos y método de exhausción, 119.—10. Los métodos y defectos de los *Elementos*, 125.—11. Otras obras matemáticas de Euclides, 127.—12. La obra matemática de Apolonio, 129.—Bibliografía, 141.
5. EL PERÍODO GRECO-ALEJANDRINO: GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA 143
1. La fundación de Alejandría, 143.—2. El carácter de la matemática greco-alejandrina, 146.—3. Areas y volúmenes en los trabajos de Arquímedes, 148.—4. Areas y volúmenes en los trabajos de Herón, 162.—5. Algunas curvas excepcionales, 164.—6. El nacimiento de la trigonometría, 166.—7. La actividad geométrica tardía en Alejandría, 175.—Bibliografía, 180.
6. EL PERÍODO ALEJANDRINO: EL RESURGIR DE LA ARITMÉTICA Y EL ÁLGEBRA 181
1. Los símbolos y operaciones de la aritmética griega, 181.—2. Crecimiento independiente de la aritmética y el álgebra, 187.—Bibliografía, 198.
7. LA RACIONALIZACIÓN GRIEGA DE LA NATURALEZA ... 200
1. La inspiración de la matemática griega, 200.—2. Los comienzos de una visión racional de la naturaleza, 201.—3. El desarrollo de la creencia en una estructura matemática, 203.—4. La astronomía matemática griega, 211.—5. La Geografía, 219.—6. La Mecánica, 222.—7. La Óptica, 227.—8. La Astrología, 230.—Bibliografía, 231.
8. EL FINAL DEL MUNDO GRIEGO 233
1. Reseña de las realizaciones griegas, 233.—2. Las limitaciones de la matemática griega, 236.—3. Los problemas legados por los griegos, 240.—4. La desaparición de la civilización griega, 242.—Bibliografía, 247.
9. LA MATEMÁTICA DE LOS HINDÚES Y DE LOS ÁRABES 248
1. La primera matemática hindú, 248.—2. Aritmética y álgebra indias del período 200-1200, 250.—3. Geometría y trigonometría indias durante el período 200-1200, 255.—4. Los árabes, 258.—5. Aritmética y álgebra árabes, 259.—6. La geometría y la trigonometría árabes, 264.—7. La matemática alrededor del 1300, 266.—Bibliografía, 269.
10. EL PERÍODO MEDIEVAL EN EUROPA..... 271
1. Los comienzos de la civilización europea, 271.—2. Los elementos disponibles para la cultura, 272.—3. El papel de las matemáticas en

- Europa en la Alta Edad Media, 274.—4. El estancamiento en matemáticas, 276.—5. El primer renacimiento de las obras griegas, 277.—6. El renacimiento del racionalismo y del interés por la naturaleza, 279.—7. El progreso específico en matemáticas, 282.—8. El progreso en las ciencias físicas, 285.—9. Sumario, 288.—Bibliografía, 290.
11. EL RENACIMIENTO 291
 1. Influencias revolucionarias en Europa, 291.—2. La nueva perspectiva intelectual, 294.—3. La difusión de la instrucción, 296.—4. La actividad humanística en las matemáticas, 298.—5. El clamor por la reforma de la ciencia, 301.—El nacimiento de empirismo, 306.—Bibliografía, 309.
12. LAS CONTRIBUCIONES MATEMÁTICAS EN EL RENACIMIENTO 311
 1. Perspectiva, 311.—2. La geometría propiamente dicha, 315.—3. Álgebra, 318.—4. Trigonometría, 319.—5. Los principales progresos científicos del Renacimiento, 323.—6. Notas sobre el Renacimiento, 331.—Bibliografía, 332.
13. LA ARITMÉTICA Y EL ÁLGEBRA EN LOS SIGLOS XVI Y XVII 335
 1. Introducción, 335.—2. La situación del sistema numérico y la aritmética, 336.—3. El simbolismo, 346.—4. La solución de las ecuaciones de tercer y cuarto grados, 351.—5. La teoría de ecuaciones, 361.—6. El teorema binomial y cuestiones afines, 364.—7. La teoría de números, 366.—8. La relación entre el álgebra y la geometría, 372.—Bibliografía, 377.
14. LOS COMIENZOS DE LA GEOMETRÍA PROYECTIVA..... 380
 1. El renacer de la geometría, 380.—2. Problemas planteados por los trabajos sobre la perspectiva, 382.—3. La obra de Desargues, 384.—4. La obra de Pascal y La Hire, 392.—5. La aparición de nuevos principios, 396.—Bibliografía, 399.
15. LA GEOMETRÍA ANALÍTICA 401
 1. La motivación de la geometría de coordenadas, 41.—2. La geometría analítica de Fermat, 402.—3. René Descartes, 403.—4. La obra de Descartes en geometría analítica, 408.—5. El avance de la geometría analítica durante el siglo XVII, 419.—6. La importancia de la geometría analítica, 424.—Bibliografía, 428.
16. LA MATEMATIZACIÓN DE LA CIENCIA 430
 1. Introducción, 430.—2. El concepto de la ciencia de Descartes, 431.—3. El enfoque de la ciencia de Galileo, 432.—4. El concepto de función, 443.—Bibliografía, 450.

17. LA CREACIÓN DEL CÁLCULO 452
 1. La motivación del cálculo, 452.—2. El trabajo sobre el cálculo de principios del siglo xvii, 454.—3. La obra de Newton, 471.—4. La obra de Leibniz, 489.—5. Una comparación de las obras de Newton y Leibniz, 500.—6. La controversia sobre la prioridad, 502.—7. Algunas adiciones inmediatas al cálculo, 503.—La solidez del cálculo, 506.—Bibliografía, 514.
18. LAS MATEMÁTICAS A PARTIR DE 1700 516
 1. La transformación de las matemáticas, 516.—2. Las matemáticas y la ciencia, 520.—3. La comunicación entre los matemáticos, 522.—4. Las perspectivas para el siglo xviii, 526.—Bibliografía, 527.
19. EL CÁLCULO INFINITESIMAL EN EL SIGLO XVIII 533
 1. Introducción, 533.—2. El concepto de función, 537.—3. Técnicas de integración y cantidades complejas, 541.—4. Integrales elípticas, 547.—5. Otras funciones especiales, 562.—6. Funciones de varias variables, 564.—7. Los intentos de proporcionar rigor al valor infinitesimal, 567.—Bibliografía, 577.
20. SERIES 579
 1. Introducción, 579.—2. Los primeros trabajos sobre series, 580.—3. Los desarrollos de funciones, 584.—4. El manejo de las series, 587.—5. Series trigonométricas, 603.—6. Fracciones continuas, 611.—7. El problema de la convergencia y la divergencia, 612.—Bibliografía, 620.
21. LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS EN EL SIGLO XVIII 622
 1. Las motivaciones, 622.—2. Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, 626.—3. Soluciones singulares, 633.—4. Ecuaciones de segundo orden y ecuaciones de Riccati, 635.—5. Ecuaciones de orden superior, 643.—7. Sistemas de ecuaciones diferenciales, 650.—8. Sumario, 663.—Bibliografía, 665.
22. LAS ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES EN EL SIGLO XVIII 666
 1. Introducción, 666.—2. La ecuación de ondas, 667.—3. Extensiones de la ecuación de ondas, 683.—4. Teoría del potencial, 693.—5. Ecuaciones en derivadas parciales de primer orden, 705.—6. Monge y la teoría de las características, 710.—7. Monge y las ecuaciones de segundo orden no lineales, 714.—8. Sistemas de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden, 716.—9. El desarrollo de las ecuaciones en derivadas parciales como disciplina matemática, 719.—Bibliografía, 720.

23. GEOMETRÍA ANALÍTICA Y DIFERENCIAL EN EL SIGLO XVIII 722
 1. Introducción, 722.—2. Geometría analítica básica, 722.—3. Curvas planas de grado superior, 726.—4. Los orígenes de la geometría diferencial, 735.—5. Curvas planas, 736.—6. Curvas en el espacio, 738.—7. La teoría de superficies, 745.—8. El problema de los mapas, 755.—Bibliografía, 757.
24. EL CÁLCULO DE VARIACIONES EN EL SIGLO XVIII 759
 1. Los problemas iniciales, 759.—2. Los primeros trabajos de Euler, 765.—3. El principio de mínima acción, 767.—4. La metodología de Lagrange, 771.—5. Lagrange y la mínima acción, 777.—6. La segunda variación, 780.—Bibliografía, 781.
25. EL ÁLGEBRA DEL SIGLO XVIII 783
 1. La situación de los números, 783.—2. La teoría de ecuaciones, 789.—3. Determinantes y teoría de la eliminación, 881.—4. La teoría de números, 804.—Bibliografía, 810.
26. LAS MATEMÁTICAS DE 1800 812
 1. La aparición del análisis, 812.—2. La motivación del trabajo del siglo XVIII, 814.—3. El problema de la demostración, 816.—4. La base metafísica, 819.—5. La expansión de la actividad matemática, 821.—6. Un vistazo adelante, 823.—Bibliografía, 827.
27. FUNCIONES DE UNA VARIABLE COMPLEJA 828
 1. Introducción, 828.—2. Los principios de la teoría de funciones complejas, 828.—3. La representación geométrica de los números complejos, 832.—4. Los fundamentos de la teoría de funciones complejas, 836.—5. La visión de Weierstrass de la teoría de funciones, 850.—6. Funciones elípticas, 852.—7. Las integrales hiperelípticas y el teorema de Abel, 861.—8. Riemann y las funciones multivalentes, 866.—9. Integrales y funciones abelianas, 876.—10. Aplicaciones conformes, 880.—11. La representación de funciones y los valores excepcionales, 882.—Bibliografía, 884.
28. LAS ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES EN EL SIGLO XIX 886
 1. Introducción, 886.—2. La ecuación de calor y las series de Fourier, 887.—3. Soluciones explícitas: la integral de Fourier, 896.—4. La ecuación del potencial y el teorema de Green, 900.—5. Coordenadas curvilíneas, 907.—6. La ecuación de ondas y la ecuación de ondas reducida, 910.—7. Sistemas de ecuaciones en derivadas parciales, 919.—8. Teoremas de existencia, 923.—Bibliografía, 933.

29. LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS EN EL SIGLO XIX 935
 1. Introducción, 935.—2. Soluciones con series y funciones especiales, 936.—3. La teoría de Sturm-Liouville, 943.—4. Teoremas de existencia, 946.—5. La teoría de singularidades, 951.—6. Las funciones automorfas, 957.—7. El trabajo de Hill sobre soluciones periódicas de las ecuaciones lineales, 963.—8. Ecuaciones diferenciales no lineales: la teoría cualitativa, 965.—Bibliografía, 973.
30. EL CÁLCULO DE VARIACIONES EN EL SIGLO XIX 975
 1. Introducción, 975.—2. La física matemática y el cálculo de variaciones, 975.—3. Extensiones matemáticas del propio cálculo de variaciones, 983.—4. Problemas relacionados en el cálculo de variaciones, 989.—Bibliografía, 990.
31. LA TEORÍA DE GALOIS 992
 1. Introducción, 992.—2. Ecuaciones binómicas, 992.—3. El trabajo de Abel sobre la solución de ecuaciones por radicales, 995.—4. La teoría de resolubilidad de Galois, 997.—5. Los problemas de construcción geométrica, 1006.—6. La teoría de los grupos de sustituciones, 1108.—Bibliografía, 1115.
32. CUATERNIONES, VECTORES Y ÁLGEBRAS LINEALES ASOCIATIVAS 1017
 1. El fundamento del álgebra sobre la permanencia de la forma, 1017.—2. La búsqueda de un «número complejo» tridimensional, 1022.—3. La naturaleza de los cuaterniones, 1027.—4. El cálculo de la extensión de Grassmann, 1030.—5. De los cuaterniones a los vectores, 1034.—6. Álgebras lineales asociativas, 1043.—Bibliografía, 1046.
33. DETERMINANTES Y MATRICES 1048
 1. Introducción, 1048.—2. Algunos nuevos usos de los determinantes, 1049.—3. Los determinantes y las formas cuadráticas, 1053.—4. Matrices, 1060.—Bibliografía, 1070.
34. LA TEORÍA DE NÚMEROS EN EL SIGLO XIX 1075
 1. Introducción, 1075.—2. La teoría de congruencias, 1076.—3. Números algebraicos, 1082.—4. Los ideales de Dedekind, 1088.—5. La teoría de las formas, 1092.—6. Teoría analítica de números, 1097.—Bibliografía, 1100.
35. EL RESURGIMIENTO DE LA GEOMETRÍA PROYECTIVA. 1102
 1. El renovado interés por la geometría, 1102.—2. Geometría euclídea sintética, 1106.—3. El resurgimiento de la geometría proyectiva sintética, 1110.—4. Geometría proyectiva algebraica, 1125.—5. Curvas planas de orden superior y superficies, 1130.—Bibliografía, 1135.

36. LA GEOMETRÍA NO EUCLÍDEA..... 1137
 1. Introducción, 1137.—2. El status de la geometría euclídea hacia 1800, 1138.—3. Las investigaciones sobre el axioma de las paralelas, 1139.—4. Presagios de las geometrías no euclídeas, 1146.—5. La creación de la geometría no euclídea, 1148.—6. El contenido técnico de la geometría no euclídea, 1154.—7. Las demandas de prioridad de Lobatchevsky y Bolyai, 1159.—8. Las implicaciones de la geometría no euclídea, 1161.—Bibliografía, 1163.
37. LA GEOMETRÍA DIFERENCIAL DE GAUSS Y RIEMANN. 1165
 1. Introducción, 1165.—2. La geometría diferencial de Gauss, 1166.—3. El enfoque de Riemann de la geometría, 1174.—4. Los sucesores de Riemann, 1184.—5. Los invariantes de las formas diferenciales, 1188.—Bibliografía, 1192.
38. LAS GEOMETRÍAS PROYECTIVA Y MÉTRICA..... 1193
 1. Introducción, 1193.—2. Las superficies como modelos de la geometría no euclídea, 1194.—3. Las geometrías proyectiva y métrica, 1196.—4. Los modelos y el problema de la consistencia, 1205.—5. La geometría desde el punto de vista de las transformaciones, 1210.—6. La realidad de la geometría no euclídea, 1215.—Bibliografía, 1218.
39. LA GEOMETRÍA ALGEBRAICA..... 1219
 1. Antecedentes, 1219.—2. La teoría de invariantes algebraicos, 1220.—3. El concepto de transformación birracional, 1230.—4. El enfoque de la teoría de funciones en geometría algebraica, 1232.—5. El problema de la uniformización, 1237.—6. El enfoque de la geometría algebraica, 1239.—7. El enfoque aritmético, 1243.—8. La geometría algebraica de superficies, 1245.—Bibliografía, 1248.
40. LA INTRODUCCIÓN DEL RIGOR EN EL ANÁLISIS..... 1250
 1. Introducción, 1250.—2. Las funciones y sus propiedades, 1252.—3. La derivada, 1259.—4. La integral, 1263.—5. La teoría de series infinitas, 1269.—6. Las series de Fourier, 1276.—7. La situación del análisis, 1283.—Bibliografía, 1289.
41. LA FUNDAMENTACIÓN DE LOS NÚMEROS REALES Y TRANSFINITOS..... 1292
 1. Introducción, 1292.—2. Números algebraicos y trascendentes, 1294.—3. La teoría de los números irracionales, 1296.—4. La teoría de los números racionales, 1302.—5. Otros enfoques del sistema de los números reales, 1306.—6. El concepto de conjunto infinito, 1309.—7. Los fundamentos de la teoría de conjuntos, 1311.—8. Cardinales y ordinales transfinitos, 1317.—9. La situación de la teoría de conjuntos hacia 1900, 1322.—Bibliografía, 1324.

42. LOS FUNDAMENTOS DE LA GEOMETRÍA 1325
 1. Los defectos de Euclides, 1325.—2. Contribuciones a la fundamentación de la geometría proyectiva, 1328.—3. Los fundamentos de la geometría euclídea, 1331.—4. Otros trabajos de fundamentación, 1338.—5. Algunas cuestiones abiertas, 1340.—Bibliografía, 1347.
43. LA MATEMÁTICA EN TORNO A 1900..... 1348
 1. Las principales características de los desarrollos del siglo XIX, 1348.—2. El movimiento axiomático, 1353.—3. La matemática como creación del hombre, 1354.—4. La pérdida de la verdad, 1359.—5. La matemática como el estudio de estructuras arbitrarias, 1365.—6. El problema de la consistencia, 1368.—7. Una mirada hacia el futuro, 1368.—Bibliografía, 1369.
44. LA TEORÍA DE FUNCIONES DE UNA O VARIAS VARIABLES REALES 1371
 1. Los orígenes, 1371.—2. La integral de Stieltjes, 1372.—3. Primeros trabajos sobre contenido y medida, 1373.—4. La integral de Lebesgue, 1377.—5. Generalizaciones, 1384.—Bibliografía, 1385.
45. ECUACIONES INTEGRALES 1387
 1. Introducción, 1387.—2. Los comienzos de una teoría general, 1393.—3. La obra de Hilbert, 1398.—4. Los sucesores inmediatos de Hilbert, 1412.—5. Generalizaciones de la teoría, 1416.—Bibliografía, 1417.
46. EL ANÁLISIS FUNCIONAL 1419
 1. ¿Qué es el análisis funcional?, 1419.—2. La teoría de funcionales, 1420.—3. El análisis funcional lineal, 1427.—4. La axiomatización de los espacios de Hilbert, 1440.—Bibliografía, 1444.
47. LA TEORÍA DE SERIES DIVERGENTES 1446
 1. Introducción, 1448.—2. La utilización informal de las series divergentes, 1448.—3. La teoría formal de las series divergentes, 1448.—3. La teoría formal de las series asintóticas, 1456.—4. El problema de la sumabilidad de series divergentes, 1464.—Bibliografía, 1478.
48. EL ANÁLISIS TENSORIAL Y LA GEOMETRÍA TENSORIAL. 1480
 1. Los orígenes del análisis tensorial, 1480.—2. El concepto de tensor, 1481.—3. Derivación covariante, 1487.—4. El desplazamiento paralelo, 1491.—5. Generalizaciones de la geometría riemanniana, 1495.—Bibliografía, 1497.

49.	LA APARICIÓN DEL ÁLGEBRA ABSTRACTA.....	1499
	1. El panorama del siglo XIX, 1499.—2. La teoría abstracta de grupos, 1501.—3. La teoría abstracta de cuerpos, 1512.—4. Anillos, 1518.—5. La teoría de álgebras no asociativas, 1522.—6. Panorama general del álgebra abstracta, 1525.—Bibliografía, 1527.	
50.	LOS ORÍGENES DE LA TOPOLOGÍA.....	1529
	1. ¿Qué es la topología?, 1529.—2. La topología conjuntista, 1531.—3. Los comienzos de la topología combinatoria, 1536.—4. La obra combinatoria de Poincaré, 1545.—5. Los invariantes combinatorios, 1554.—6. Los teoremas de punto fijo, 1555.—7. Generalizaciones y extensiones, 1558.—Bibliografía, 1560.	
51.	LOS FUNDAMENTOS DE LA MATEMÁTICA.....	1562
	1. Introducción, 1562.—2. Las paradojas de la teoría de conjuntos, 1563.—3. La axiomatización de la teoría de conjuntos, 1566.—4. La aparición de la lógica matemática, 1569.—5. La escuela logicista, 1576.—6. La escuela intuicionista, 1583.—7. La escuela formalista, 1591.—8. Algunos desarrollos recientes, 1598.—Bibliografía, 1600.	
	ÍNDICE ONOMÁSTICO	1605
	ÍNDICE DE MATERIAS	1619



Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

A mi esposa, Helen Mann Kline

PROLOGO

Si queremos prever el futuro de la matemática, el camino adecuado para conseguirlo es el de estudiar la historia y el estado actual de esta ciencia.

HENRI POINCARÉ

Este libro trata de los descubrimientos y desarrollos matemáticos más importantes llevados a cabo desde la Antigüedad hasta las primeras décadas del siglo XX. El objetivo perseguido es el de presentar las ideas centrales, poniendo un énfasis especial en aquellas corrientes de desarrollo que se han mostrado como las más importantes a lo largo de los principales períodos de la historia de la matemática, y que han ejercido una influencia destacada orientando y dándole forma a la actividad matemática posterior. También se ha prestado una gran atención al concepto mismo de matemática, siguiendo los cambios que ha experimentado este concepto a lo largo de los diferentes períodos, así como a la idea que han ido teniendo los matemáticos de su propia actividad.

Este libro debe ser considerado simplemente como un panorama general de la historia de la matemática. Si uno se para a pensar que las obras de Euler superan los setenta volúmenes, las de Cauchy tienen veintiséis y las de Gauss doce, fácilmente puede caer en la cuenta de que una obra como ésta, en un solo volumen, no puede tener pretensiones de presentar una exposición completa. En algunos capítulos de este libro presentamos solamente unas pocas muestras de lo que se creó en los campos correspondientes, aunque confiamos en que

estas muestras sean las más representativas. Por otra parte, al citar teoremas u otros resultados hemos omitido a menudo condiciones menores que se necesitarían para ser estrictamente correctos, con el fin de centrar la atención en las ideas principales. Por restringida que pueda parecer esta obra, creemos haber conseguido presentar una cierta perspectiva de la historia completa de la matemática.

El libro está organizado subrayando más bien los temas matemáticos importantes que los hombres que los desarrollaron. Ciertamente es que toda rama de la matemática lleva el sello de sus fundadores, y que los grandes hombres han jugado papeles decisivos al determinar el curso a seguir por la matemática, pero son sus ideas lo que queremos presentar; las biografías se considerarán como totalmente subordinadas. Hemos seguido, a este respecto, el consejo de Pascal: «Cuando citemos autores, citaremos sus demostraciones, no sus nombres.»

Por razones de coherencia, en especial para el período posterior al 1700, hemos tratado cada desarrollo en el momento en que alcanza su madurez, se destaca y ejerce su influencia sobre otros campos de la matemática. Así, por ejemplo, la geometría no euclídea aparece expuesta en el siglo XIX, a pesar de que la historia de los esfuerzos por demostrar o sustituir el axioma euclídeo del paralelismo se remonta a la época inmediatamente posterior a Euclides. Naturalmente, ha habido muchos temas que han aparecido recurrentemente en distintos períodos.

Con objeto de mantener el material dentro de límites razonables, hemos tenido que ignorar varias civilizaciones como la china¹, la japonesa y la maya, dado que su obra prácticamente no tuvo impacto sobre las corrientes centrales del pensamiento matemático. Por otra parte, a algunas teorías matemáticas como la teoría de probabilidades y el cálculo de diferencias finitas, que tienen hoy una gran importancia pero que no jugaron un papel tan importante en el período que aquí consideramos, se les ha dedicado poca atención. El enorme desarrollo de las últimas décadas nos ha obligado a incluir únicamente las creaciones del siglo XX que adquirieron su importancia dentro del período mencionado. Seguir a lo largo del siglo XX el desarrollo de temas tales como la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias o el

¹ Puede verse una buena exposición de la historia de la matemática china en el libro de Joseph Needham *Science and Civilization in China*, Cambridge Univ. Press, 1959, vol. 3, págs. 1-168.

cálculo de variaciones exigiría echar mano de materiales muy especializados que sólo tienen interés para los investigadores en esos campos concretos y alargaría excesivamente el libro. Aparte de estas últimas consideraciones, hay que añadir que resulta muy difícil evaluar objetivamente y sobre la marcha la importancia de muchos de los desarrollos más recientes. Precisamente la historia de la matemática nos enseña que muchos temas que provocaron un enorme entusiasmo y atrajeron la atención de los mejores matemáticos terminaron cayendo en el olvido. No hay más que recordar la afirmación de Cayley en el sentido de que la geometría proyectiva es toda la geometría, o la de Sylvester de que la teoría de invariantes algebraicos resume todo lo valioso de la matemática. En realidad, una de las preguntas más interesantes a las que viene a responder la historia es la de qué es lo que logra sobrevivir en la matemática; la historia hace, ciertamente, su propia y fundada evaluación.

De los lectores que tengan incluso unos conocimientos básicos de las docenas de campos más importantes no se puede esperar que conozcan lo esencial de todos estos desarrollos. Por tanto, y excepto en algunos temas muy elementales, se explica también el contenido de aquellos cuya historia se está estudiando, unificando así en cierto modo la exposición con la historia. Estas explicaciones de las diversas teorías pueden no llegar a clarificarlas completamente, pero deberían dar al menos una idea de su naturaleza. Consecuentemente, este libro puede servir en cierto sentido como una introducción histórica a la matemática; este enfoque constituye ciertamente uno de los mejores procedimientos para llegar a entender y apreciar correctamente una teoría.

Esperamos que este libro sea útil tanto para matemáticos profesionales como en formación. El profesional se ve hoy obligado a dedicar tanto tiempo y energías a su especialidad, que tiene pocas oportunidades de familiarizarse con su historia. Y, sin embargo, este marco histórico es muy importante. Las raíces del presente se hunden profundamente en el pasado, y casi nada de ese pasado resulta irrelevante para el hombre que trata de entender cómo el presente llegó a ser lo que es. Por otra parte, la matemática, pese a su proliferación en cientos de ramas, tiene su unidad propia y sus metas y problemas importantes y, salvo que los diversos campos contribuyan decididamente al núcleo de la matemática, corren el peligro de volverse estériles. La manera más segura de combatir los peligros que amenazan nuestra fragmentada ciencia quizás sea la de llegar a cono-

cer los logros, tradiciones y objetivos de la matemática en el pasado, para poder dirigir las investigaciones por vías fructíferas. Como muy bien dijo Hilbert: «La matemática es un organismo para cuya fuerza vital es condición necesaria la unión indisoluble de sus partes.»

Para los estudiantes de matemáticas este libro puede presentar otro tipo de interés. Los cursos usuales presentan teorías matemáticas que parecen tener poca relación unas con otras. La historia puede dar la perspectiva global del tema y relacionar las materias de los cursos no sólo unas con otras sino también con las líneas centrales del pensamiento matemático.

Asimismo, dichos cursos también resultan engañosos por otro motivo básico: en ellos se da una presentación de una teoría organizada lógicamente, que deja la impresión de que los matemáticos han avanzado de un teorema al siguiente de una manera casi natural, que pueden superar cualquier dificultad, y que las teorías están ya completamente trilladas y acabadas. La imponente sucesión de teoremas hunde en la miseria al alumno, especialmente si está empezando a estudiar la materia.

La historia, por el contrario, nos enseña que el desarrollo de cualquier rama de la matemática se ha llevado a cabo de una manera gradual, a base de resultados que solían provenir de diversas direcciones. También nos enseña que a menudo se han necesitado décadas, e incluso cientos de años, de esfuerzos antes de conseguir algún progreso de importancia. Y en lugar de la impresión de que las teorías están ya completamente trilladas y terminadas, uno se encuentra con que, a menudo, lo que se ha conseguido es simplemente un punto de partida, con que hay que rellenar aún muchos huecos, o con que todavía quedan por hacer las generalizaciones realmente importantes.

Las cuidadas y ordenadas exposiciones que se hacen en los cursos habituales no muestran en absoluto los conflictos del proceso creativo, las frustraciones, y el largo y arduo camino que los matemáticos han tenido que recorrer para llegar a construir una estructura importante. Siendo consciente de esto, el estudiante no sólo logrará un conocimiento mejor, sino que sacará de ahí el valor necesario para seguir atacando con tenacidad sus propios problemas, y no se desanimará por las deficiencias de su propio trabajo. Realmente, el conocimiento de cómo han avanzado los matemáticos dando traspiés, a veces en la oscuridad más absoluta, hasta llegar a reunir las piezas individuales de sus resultados, debería animar a cualquier principiante en la investigación.

Para cubrir el extenso período que pretende describir este libro, hemos tratado de seleccionar las fuentes más fiables. Para la época anterior al cálculo infinitesimal, estas fuentes, tales como el libro de T. L. Heath *A History of Greek Mathematics*, son obviamente fuentes secundarias, y en esos casos hemos utilizado varias de ellas y no sólo una. Para los desarrollos posteriores, casi siempre se ha podido ir directamente a las obras originales, que afortunadamente pueden encontrarse en las revistas o en las obras completas de los matemáticos más eminentes. También hemos visto facilitada nuestra labor por los numerosos informes y resúmenes de investigaciones que se encuentran a menudo en las ediciones de obras completas. Hemos tratado de dar referencias concretas de todos los resultados importantes, pero hacerlo así para todos los teoremas habría supuesto una confusa masa de referencias y un consumo de espacio que es mejor dedicarlo a la exposición misma.

Las fuentes utilizadas se indican en las bibliografías de los finales de capítulo; el lector interesado puede obtener en dichas fuentes mucha más información de la que hemos extractado aquí. Estas bibliografías incluyen también muchas referencias que no se podrían considerar como fuentes; sin embargo, se ha considerado interesante incluirlas bien porque ofrecen información adicional, porque el nivel de la presentación puede ser útil para algunos lectores, o porque pueden ser más fácilmente accesibles que las fuentes originales.

Quiero expresar mi gratitud a mis colegas Martin Burrow, Bruce Chandler, Martin Davis, Donald Ludwig, Wilhelm Magnus, Carlos Moreno, Harold N. Shapiro y Marvin Tretkoff, que respondieron a numerosas preguntas, leyeron muchos capítulos y ejercieron una valiosa crítica. Un agradecimiento muy especial debo a mi esposa Helen por su crítica del manuscrito, su extensa comprobación de nombres, fechas y fuentes, así como por su cuidadosa lectura de las pruebas de imprenta. De gran ayuda resultó la labor de Mrs. Eleanore M. Gross, que mecanografió todo el texto. Por último, quiero expresar también mi gratitud a la dirección y equipo de la Oxford University Press por su escrupulosa edición de este libro.

Morris Kline
Nueva York
Mayo 1972