Albrecht Beutelspacher

Matemáticas:
101 preguntas fundamentales

Alianza editorial
El libro de bolsillo

Título original: *Albrecht Beutelspachers Kleines Mathematikum. Die 101 wichtigsten Fragen und Antworten zur Mathematik*
Traducción del alemán: Dulcinea Otero-Piñeiro
Revisión científico-técnica: David Galadí-Enríquez, doctor en Física

Primera edición: 2011
Tercera reimpresión: 2022

Diseño de colección: Estrada Design
Diseño cubierta: Manuel Estrada
Fotografía de cubierta: *Complicated Math Equations on a Blackboard.* © AGE Fotostock
Selección de imagen: Alicia Fuentes

Calle Juan Ignacio Luca de Tena, 15
28027 Madrid
www.alianzaeditorial.es

PAPEL DE FIBRA
CERTIFICADA

ISBN: 978-84-206-5198-9
Depósito legal: B. 13.398-2011
Printed in Spain

Si quiere recibir información periódica sobre las novedades de Alianza Editorial, envíe un correo electrónico a la dirección: alianzaeditorial@anaya.es

Índice

Formas y patrones

Prólogo

El Mathematikum de Giessen, una ciudad universitaria en pleno corazón de Alemania, es un museo interactivo de matemáticas que, desde su inauguración en el año 2002, ha atraído cada año a 150 000 visitantes de todas las edades. Allí disfrutan de 150 módulos donde resuelven acertijos, experimentan con pompas de jabón o descubren por sí mismos la sección áurea. De manera casi automática conocen fenómenos matemáticos, asimilan ideas y amplían conocimientos.

Aunque el Mathematikum se presente sin ecuaciones ni fórmulas, aunque apenas trate la historia de las matemáticas y aunque apenas incorpore explicaciones verbales, es evidente que la experimentación suscita preguntas en muchos visitantes. El caso es que a menudo me plantean cuestiones en persona, algunos me escriben un correo electrónico y unos pocos recurren también al método más tradicional de enviarme una carta por correo postal.

Los interrogantes que me formulan son muy variados en todos los sentidos.

Algunas consultas son de naturaleza matemática: ¿Qué probabilidades hay de acertar seis en la Lotería Primitiva? ¿Cuántos granos de arroz hay en el tablero de ajedrez? ¿Qué es el último teorema de Fermat?

Hay preguntas sobre historia de las matemáticas: ¿Desde cuándo existe el cero? ¿Por qué no hay Premio Nobel de matemáticas? ¿Qué son los problemas de Hilbert?

Ciertas cuestiones son fáciles de responder: ¿Cuánto mide un papel DIN-A4? ¿Da mala suerte el número trece? ¿Cuánto es $^1/_2$ más $^1/_3$?

Otras preguntas entrañan dificultades formidables: ¿Se puede demostrar todo? ¿Por fuerza tiene que haber fórmulas? ¿Por qué menos por menos da más?

Y algunas de las consultas trascienden con creces el ámbito seguro de las matemáticas: ¿Entenderían los extraterrestres nuestras matemáticas? ¿Se puede demostrar la existencia de Dios? ¿Por qué a los matemáticos se les da tan mal hacer cuentas?

En este libro he dejado escritas mis respuestas. En algunos casos he tenido que hacer un esfuerzo para tomarme en serio la pregunta. Las respuestas deben ser correctas, no puedo fantasear lo más mínimo; debo ser capaz de responderlo todo desde un punto de vista científico. En otros casos me he tomado en serio además a la persona que la planteó, en tanto que siempre he procurado responder con claridad. Porque, al fin y al cabo, lo que la gente quiere saber es «¿qué pasa en realidad?».

Como es natural, tanto la selección de las preguntas como el tono de las respuestas siguen criterios persona-les. Y, a veces, también tuve que armarme de coraje para dar una respuesta clara, concisa y tajante. Me guié por la maravillosa frase que Theodor Fontane puso en boca de su Stechlin: «No hay verdades inapelables y, cuando las hay, son tediosas».

Espero haber respondido todos los interrogantes con este libro. Pero, si le quedara alguna pregunta por hacer y cree que puedo servirle de ayuda, no dude en escribirme sin más: albrecht.beutelspacher@mathematikum.de.

Fundamentos

1. ¿Qué son las matemáticas?

¡Empecemos por la pregunta más difícil!

Aun así, daré cuatro respuestas:

1) Las matemáticas se pueden definir describiendo su contenido o nombrando sus *objetos* de estudio.– Tradicionalmente se distingue entre geometría, álgebra, análisis matemático y estocástica. La geometría es la ciencia del espacio que nos circunda, el cual intentamos desentrañar mediante la definición de puntos, líneas, planos, triángulos, cuadrángulos, círculos y demás figuras, y su estudio nos procura un conocimiento cada vez más amplio del espacio. Al igual que la geometría, el álgebra también alcanzó su esplendor durante la Antigüedad clásica. Se denomina así al estudio de los números y sus características, por ejemplo, los números primos. El aná-

lisis matemático, también llamado cálculo diferencial e integral, es la doctrina de las cantidades que cambian sin cesar. Lo fundaron sobre todo Leibniz y Newton. La estocástica es la más reciente de las cuatro disciplinas; es la rama de las matemáticas dedicada al azar.

2) Las matemáticas también se pueden definir mediante la descripción de sus *métodos,* los cuales la separan del resto de las ciencias.– Lo que caracteriza realmente a las matemáticas es la demostración, es decir, la deducción puramente lógica de sus enunciados.

Las matemáticas usan términos que están perfectamente definidos: triángulo, cuadrángulo, círculo, números enteros, números primos, funciones, etcétera. Maneja las propiedades de esos términos y las relaciones entre esas propiedades: el teorema de Pitágoras es válido para todo triángulo rectángulo.

Esas relaciones lógicas ponen orden en el mundo de los conceptos.

3) Pero también podemos mirar hacia fuera y centrar la atención en la *descripción y el gobierno del mundo* a través de las matemáticas.– Galileo Galilei (1564-1642) estaba convencido de que las matemáticas son el lenguaje de la naturaleza. Las matemáticas son el instrumento más poderoso del que disponemos para describir, conocer y estructurar el mundo que nos rodea.

4) Otra definición, moderna y en mi opinión muy certera, procede del matemático Hans Freudenthal (1905-1990), quien también destacó como especialista científico y didáctico. Él afirma que: «Los términos, conceptos y procedimientos matemáticos son herramientas con las

que organizamos mentalmente fenómenos del mundo físico, social y mental».

Esta definición pone claramente de manifiesto que las matemáticas *las hacen las personas:* «con las que organizamos». Las matemáticas no surgen por sí solas, sino a través de la intervención activa del ser humano.

Por cierto, este libro ofrece 100 respuestas más para la pregunta «¿qué son las matemáticas?».

2. ¿Desde cuándo hay matemáticas?

Las matemáticas constituyen, junto con la astronomía, la ciencia más antigua. A pesar de ello, hay al menos tres maneras de responder desde cuándo existen las matemáticas.

Primera respuesta: desde hace unos 30 000 años. De esa época datan los primeros vestigios culturales de la humanidad, entre los que se cuentan huesos con numerosas muescas, las cuales se revelan tan esmeradas, tan regulares y tan sistemáticas que los historiadores están seguros de que se trata de representaciones de cifras. Qué contaban y por qué, no se sabe. Pero está claro que por entonces ya había gente que efectuaba cómputos y que valoraba lo suficiente el resultado de los mismos como para registrarlo mediante laboriosas muescas en huesos.

La segunda respuesta es la siguiente: hay matemáticas desde hace unos 5 000 años. Por entonces, tanto los babilonios como los egipcios usaban métodos matemáticos muy desarrollados. Sabían anotar números con sentido, resolver ciertas ecuaciones, calcular calendarios y medir terrenos. Para ello se servían de conocimientos tales como el teorema de Pitágoras, el cual incluimos hoy sin dudarlo en el ámbito de las matemáticas. Por lo que se sabe, esos conocimientos se consideraban por entonces leyes naturales. Es decir, se comprobaban mediante ejemplos y, después, se utilizaban sin más.

Esto hace necesaria una tercera respuesta. A saber: hace unos 2 500 años los griegos fundaron las matemáticas tal y como las conocemos ahora. Entonces descubrieron que a través de la reflexión rigurosa se podían alcanzar argumentos precisos y conclusiones lógicas para el conocimiento, y no sólo mediante la observación, la experiencia y la intuición.

Por entonces se acuñaron tres conceptos: definición, proposición, demostración. Esta terna ha caído en cierto descrédito hoy en día, lo cual es perfectamente comprensible puesto que se usó durante siglos como panacea didáctica, cuando jamás se pensó que debiera servir como tal.

Toda *definición* debe describir un término con precisión y delimitarlo de manera inequívoca frente a otros. En matemáticas siempre se sabe con toda exactitud de qué se está hablando. Si decimos «circunferencia» no nos referimos con ello a cualquier cosa redonda a la que, en caso de necesidad, atribuiremos ciertas características, sino que toda *circunferencia* se define como «el conjunto de todos los puntos que distan lo mismo del punto central». Y ésa es la única propiedad que debe usarse.

El saber matemático debe expresarse en *proposiciones*.

En este caso sucede lo mismo que con las definiciones; también se sabe siempre con exactitud qué hay que demostrar o qué se ha demostrado.

La *demostración* es el método matemático que asegura la verdad. Es la «reflexión rigurosa» llevada a cabo en forma ordenada. Las demostraciones que se basan en argumentos puramente lógicos tienen, además, la máxima objetividad.

Sé que a muchos estudiantes de enseñanza básica y universitaria no les gustan las demostraciones, y también sé que aparecen cada vez menos en la docencia. Personalmente, no sólo lo considero una pena sino también un error. Precisamente eso es lo que diferencia las matemáticas del resto de las ciencias, el hecho de que los resultados se obtienen por pura lógica y, por tanto, con la máxima objetividad.

Pensemos en el teorema de Pitágoras, el enunciado más célebre de las matemáticas: en todo triángulo rectángulo, donde los lados más cortos miden a y b, y el lado más largo mide c, se da que $a^2 + b^2 = c^2$. Este principio se descubrió por primera vez hace 2 500 años, sirve hoy literalmente igual que entonces, ¡y dentro de 2 500 años seguirá siendo tan válido como hoy y como entonces! ¿Qué otra ciencia puede presumir de lo mismo?

3. ¿Cuál fue el primer libro de matemáticas?

Unos 300 años antes de Cristo un hombre escribió un libro que se cuenta entre las obras más influyentes de la historia. Cierto es que no causó ninguna revolución política, social ni religiosa como, por ejemplo, la Biblia, el Corán o *El capital,* pero alcanzó una repercusión casi inconcebible en el desarrollo de la ciencia. Sin esa obra, la historia de las matemáticas habría transcurrido de un modo completamente distinto. Es, con diferencia, el libro de matemáticas más importante (y, por cierto, también el más exitoso) de todos los tiempos.

Aquel hombre se llamaba Euclides, y el libro que escribió se titula *Los elementos*.

Sobre la persona de Euclides no sabemos casi nada. Se cree que desarrolló su actividad entre los años 320 y 260 a. C. en Alejandría, que entonces era el centro científico del mundo, y se le considera el fundador de la escuela matemática de Alejandría. Escribió muchos libros, de los cuales seis versaban sobre matemáticas.

La obra más conocida de Euclides es sin duda *Los elementos,* que se divide en trece libros. Los libros I al IV tratan sobre geometría plana; el libro V, sobre la disciplina de las proporciones; el libro VI describe la geometría de analogías; los libros VII a IX, la teoría de números; el libro X estudia las distintas líneas rectas, y los libros XI a XIII versan finalmente sobre geometría espacial.

Cuando se abre el libro, impacta su austeridad. No comienza con un prólogo programático, ni con una alusión a sus predecesores, ni con agradecimientos, sino que empieza sin más. Definiciones, axiomas, postulados, unas pocas páginas y enseguida proposiciones, ejercicios y construcciones.

Se cree que en *Los elementos* no hay ninguna proposición demostrada por primera vez por Euclides. Su intención no era ésa. *Los elementos* pretende reunir de forma sistemática todo el saber matemático de entonces. Un mero resumen ya habría representado un logro admirable que habría garantizado a Euclides la inmortalidad.

Pero esta obra no es una enciclopedia, ni una recopilación de datos donde todo aparece junto al resto con la misma relevancia. El mérito de Euclides consistió en darle forma a todo ello, una forma matemática. Y eso significa que una cosa deriva de la otra, es más, debe derivar de la otra. Se sigue una estructura lógica, de manera que todas las proposiciones se demuestran, y para demostrarlas sólo se admiten conclusiones lógicas que utilicen proposiciones ¡que ya hayan sido demostradas! Es decir, para la proposición número 29 sólo pueden usarse las proposiciones 1 a 28. Desde luego, esto no se puede hacer *ad infinitum,* sino que hay que partir de ciertas afirmaciones: son las máximas o postulados que hoy denominamos axiomas. Un postulado típico sería: a través de dos puntos cualesquiera se puede trazar una línea recta. De modo que la regla consiste en que para demostrar la proposición número 29 sólo se deben usar las proposiciones 1 a 28 y los postulados.

Los elementos es una obra que marcó estilo e ilustra de manera ejemplar la construcción de una ciencia; ¡una obra informativa y normativa!

Euclides consiguió crear un patrón *de facto* que ha caracterizado y definido las matemáticas a lo largo de 2300 años, y que seguirá haciéndolo mientras existan las matemáticas.

4. ¿Qué es un punto?

La primera frase del primer libro de matemáticas del mundo, *Los elementos* de Euclides, reza: «Definiciones. 1. Un *punto* es aquello que no tiene partes».

Como es natural, Euclides comienza con definiciones para precisar con exactitud de qué se está hablando. Después aparecen los postulados y axiomas como, por ejemplo, «De cualquier punto a cualquier punto se puede trazar una línea recta» y, por último, les siguen proposiciones que se presentan en su mayoría como ejercicios desafiantes. La primera dice: «Trácese un triángulo equilátero sobre un segmento recto dado».

Todas las proposiciones se demuestran. Es decir, se infieren mediante reglas finales lógicas a partir de los postulados y axiomas, así como de las proposiciones demostradas previamente. Es un método perfecto y modélico. Tal como deben ser las matemáticas.

Sólo queda una pequeña mácula. La primera definición, la definición de punto, que tan clara parece, jamás se usa. Tampoco se emplea nunca la segunda definición: «Una *línea* es una longitud sin anchura». En ningún momento aparece un argumento que diga: «De la definición del punto, o sea, que no tiene partes, se deriva esto y esto». ¿Fue un olvido de Euclides?

Las matemáticas llevan 2 000 años resolviendo este problema. Una y otra vez se ha intentado definir qué *es* un punto en realidad, pero la tarea provocó un desasosiego generalizado, no porque fuera muy difícil o imposible, sino porque no podían usarse todas las definiciones a la vez. Esto parece negativo pero es absolutamente positivo. No se *necesita* tal definición. No hace falta saber qué *es* un punto para hacer geometría. Suena paradójico pero es tranquilizador.

El primero que expresó con claridad este hecho fue el matemático Moritz Pasch en Giessen durante el siglo XIX. El problema de qué era un punto no se resolvió, sino que se disolvió. Basta con conocer los postulados y axiomas. Se trata de algo parecido a lo que ocurre en el ajedrez. No hay que saber qué «es» una torre, es suficiente con conocer las reglas para moverla, comer otras fichas con ella o que otras se la coman.

Esto lo expresó con una contundencia insuperable David Hilbert, el matemático más importante de la primera mitad del siglo XX. Hilbert afirma, radical: «En todo instante, en lugar de “puntos”, “líneas” y “planos” se puede hablar de “mesas”, “sillas” y “jarras de cerveza”».

5. ¿Qué es una demostración?

«Desde la época de los griegos decir “matemáticas” significa decir “demostración”», escribe Nicolas Bourbaki, y él sabe de lo que habla. Porque tras el seudónimo «Nicolas Bourbaki» se esconde un amplio colectivo de autores franceses de la máxima calidad matemática que desde 1934 dotó a las matemáticas de unos fundamentos nuevos y «estrictos». El mensaje principal de Bourbaki era que todo debía demostrarse.