Martin Gardner

Nuevos pasatiempos matemáticos

Alianza editorial
El libro de bolsillo

Título original: *New Mathematical Diversions*
Traductor: Luis Bou

Primera edición: 1972
Segunda edición: 2018

Diseño de colección: Estudio de Manuel Estrada con la colaboración de Roberto Turégano y Lynda Bozarth
Diseño de cubierta: Manuel Estrada

Calle Juan Ignacio Luca de Tena, 15
28027 Madrid
www.alianzaeditorial.es

ISBN: 978-84-9181-063-6
Depósito legal: M. 2.316-2018
Printed in Spain

Si quiere recibir información periódica sobre las novedades de Alianza Editorial, envíe un correo electrónico a la dirección: alianzaeditorial@anaya.es

Índice

Acerca del autor

Los dos primeros *Scientific American Books of Mathematical Puzzles & Diversions,* escritos por Martin Gardner, han proporcionado, en el momento de escribir estas líneas, ratos agradables a más de 90.000 lectores, lo que, en palabras de Clifton Fadiman, ha situado a su autor «entre los clásicos del género». El volumen presente es el tercero de esa serie.

Martin Gardner ha causado las delicias de los admiradores de Carroll con sus comentarios a *Alice in Wonderland (The Annotated Alice,* publicada por Clarkson Potter), escribe regularmente en *Scientific American* y es autor de numerosos libros de temas científicos o matemáticos, entre los que se cuentan *Fads and Fallacies in the Name of Science,* publicado por Dover; *The Ambidextrous Universe* (Basic Books) [hay traducción española: *Izquierda y derecha en el Cosmos,* Alianza Editorial, 1967], y *Relativity for the Million* (Pocket Books.)

El señor Gardner nació en Tulsa, Oklahoma, se graduó en filosofía en la Universidad de Chicago, y comenzó su carrera de escritor como redactor del *Tribune* de su ciudad natal. Los Gardner y sus dos hijos viven en Hastings-on-Hudson, New York.

Introducción

El matemático inglés John Edensor Littlewood escribió en el prólogo de su *Mathematician's Miscellany:* «Un buen pasatiempo matemático vale más, y aporta más a la matemática, que una docena de artículos mediocres».

Presentamos aquí un libro de pasatiempos matemáticos, dándole a la palabra «pasatiempo» un sentido lo suficientemente amplio como para dar cabida en él a todo problema que presente aspectos curiosos o divertidos. La mayor parte de los matemáticos aprecian mucho esta clase de juegos, aunque, evidentemente, manteniendo su afición dentro de límites razonables. Para algunas personas las matemáticas recreativas pueden resultar tan fascinantes que éstas llegan a ser, para ellas, como una especie de droga. Una gran novela de Vladimir Nabokov, *The Defense,* de tema ajedrecístico, trata precisamente de uno de estos hombres, que permitió que el ajedrez, un juego de tipo matemático, dominara su mente de modo tan completo que terminó perdiendo todo contacto con la vida real y poniendo fin a la miserable partida de la suya dándose lo que los teóricos de ajedrez llaman un *suimate,* jaquemate a sí mismo: se tiró por una ventana. Encaja con la descomposición progresiva de la personalidad del maestro de ajedrez de la novela de Nabokov el que hubiera sido durante su juventud un alumno mediocre, incluso en matemáticas, que por otra parte «se hallaba completamente embebido en una colección de problemas titulada *Merry Mathematics;* en el fantástico e irregular comportamiento de los números, en las caprichosas piruetas de las líneas geométricas, en todo aquello, en fin, de que los textos carecían.»

La moraleja es: no hay razón para no disfrutar con los divertimientos matemáticos si se tienen la mente y el temperamento necesarios, pero no se debe rebasar la medida. Permitamos que nos sirvan ocasionalmente de descanso. Dejémosles despertar y estimar nuestro interés por la ciencia y por las matemáticas. Pero mantengámoslos firmemente bajo control.

Pero si no se pudiera controlar la afición hacia ellos, quizá pueda servirnos de consuelo el cuento de Lord Dunsany titulado «El Ajedrecista, el Financiero y el Otro». En él, un financiero nos habla de un amigo suyo llamado Smoggs a quien se le ofrecía un brillante porvenir hasta que se obsesionó por el ajedrez. «Le ocurrió de manera progresiva. Al principio solía jugar con un compañero durante la hora de la comida, en la época en que él y yo trabajábamos en la misma compañía. Pasado algún tiempo, empezó a ganarle sistemáticamente al otro... Entonces se hizo socio de un club de ajedrez. Una especie de fascinación parecía poseerle. Algo así como la bebida, o tal vez como la música o la poesía... Pudo haber sido un gran financiero. Dicen que no es más difícil que el ajedrez, y, en cambio, el ajedrez no conduce a nada. Nunca he visto a nadie derrochar su inteligencia de ese modo.»

«Hay hombres así», concedió el celador de la prisión. «Verdaderamente es una lástima...», dijo, mientras encerraba al financiero en su celda para que pasara la noche en ella.

De nuevo gracias a *Scientific American* por autorizar la reimpresión de estos veinte artículos. Como en las dos recopilaciones anteriores, se han ampliado los artículos, corregido los errores y se ha añadido gran cantidad de material que he recibido de los lectores. Estoy también en deuda con mi esposa, que me ayudó en la corrección de las pruebas; con mi editora, Nina Bourne; pero sobre todo y principalmente con el conjunto, todavía creciente, de lectores, cuyas cartas, provinientes de todos los rincones del país y aun del mundo, han enriquecido en tan gran medida el material que aquí se reproduce.

Martin Gardner

Capítulo 1
El sistema binario

Un ticket rojo asomaba entre el parabrisas y su raqueta. Cuidadosamente, lo rompí en dos, cuatro, ocho trocitos.

Vladimir Nabokov, *Lolita.*

El sistema de numeración que se utiliza en la actualidad en todo el mundo civilizado es un sistema decimal, basado en las potencias sucesivas de 10. El dígito que ocupa el extremo de un número cualquiera, representa un múltiplo de 10^0, o sea, de 1. Yendo de derecha a izquierda el dígito que sigue indica un múltiplo de 10^1, el tercero, un múltiplo de 10^2, y así sucesivamente. De este modo, 777 representa la suma de $(7 \times 10^0) + (7 \times 10^1) + (7 \times 10^2)$. Casi con seguridad, el motivo de que 10 sea tan ampliamente utilizado como base de numeración, se encuentra en el hecho de que tenemos diez dedos. Si Marte estuviese habitado por humanoides con doce dedos, sería muy verosímil que la aritmética marciana hiciera uso de una notación basada en 12.

El más sencillo de los sistemas de numeración que se basan en la posición relativa de las cifras es el sistema binario, construido sobre las potencias de 2. Algunas tribus primitivas cuentan de modo binario y los antiguos matemáticos chinos lo conocieron ya; pero al parecer, fue el gran matemático alemán Gottfried von Leibniz quien por vez primera lo desarrolló con detalle. Para Leibniz, el sistema binario simbolizaba una profunda verdad metafísica. El consideraba al 0 como emblema de no-ser, de la nada; y al 1 como símbolo del ser, de la sustancia. Ambos símbolos son necesarios al Creador, pues un cosmos que contuviera tan sólo sustancia pura resultaría indistinguible de un cosmos vacío, sin arrebatamiento ni sonido y cuyo emblema sería el 0. Del mismo modo que todo número natural puede representarse en el sistema binario mediante una sucesión adecuada de 1 y 0, así, pensaba Leibniz, la estructura matemática de todo el universo creado resulta posible como consecuencia de la disyuntiva primordial entre el ser y la nada.

Desde los tiempos de Leibniz hasta muy recientemente, el sistema binario fue poco más que una curiosidad sin valor práctico. ¡Pero llegaron las computadoras! Los hilos eléctricos conducen o no una corriente; un interruptor puede hallarse abierto o cerrado; un imán, polarizado norte-sur o sur-norte; un circuito flip-flop, encontrarse en posición flip o en posición flop. Por tales razones, es posible alcanzar una velocidad y precisión enormes construyendo calculadoras que puedan procesar datos cifrados de forma binaria. «Lástima –escribe Tobías Dantzig en su libro *Number, the Language of Science* (El número, idioma de la Ciencia)– que lo que fue admirado como monumento al monoteísmo haya terminado en las tripas de un robot.»

El sistema binario juega un importante papel en las matemáticas recreativas: el juego de Nim, algunos rompecabezas mecánicos como la Torre de Hanoi y los Anillos de Cardano, un sinfín de trucos con naipes, así como muchos «rompecabezas» se fundamentan en él. Aquí consideraremos solamente dos series de tarjetas; una de ellas permite, por así decirlo, «la transmisión del pensamiento»; la segunda serie consiste en una serie de fichas perforadas, íntimamente relacionadas con las anteriores, que permiten realizar algunos otros divertimientos de origen binario.

En la figura 1 se aclara la construcción de las tarjetas para la transmisión del pensamiento. En el lado izquierdo se encuentran los números binarios de 0 a 31. Cada cifra de un número binario representa una potencia de 2, comenzando por 2^0, o sea 1, en el extremo derecho del número, y continuando después por 2^1 (o sea 2), 2^2, 2^3 ..., conforme se va hacia la izquierda. Estas potencias de 2 encabezan las columnas. Para traducir a su equivalente decimal un número binario, basta efectuar la suma de las potencias de 2 que corresponden a las columnas que contienen un 1. Así, por ejemplo, 10101 representa 16 + 4 + 1, es decir, 21. Para devolver 21 a su expresión binaria, se sigue un procedimiento inverso. Se divide 21 entre 2. El cociente es 10 y el resto 1. Este resto es la primera cifra de la derecha del número binario. A continuación se divide 10 entre 2. No hay resto, y en consecuencia la siguiente cifra binaria es 0. Después se divide 5 entre 2, y se prosigue de este modo hasta completar el número binario 10101. En la última operación, 2 no cabe en 1, y por lo tanto, el cociente es 0 y el resto 1.

Esta tabla permite obtener la serie de tarjetas que nos servirá en nuestras experiencias de transmisión del pensamiento. Para ello, basta sustituir cada 1 de cada número binario por el número decimal equivalente a ese número binario. El resultado de esta transcripción se encuentra en el lado derecho de la figura 1.

Cada columna de números se copia en una tarjeta separada. Si encuentra algún voluntario, déle las cinco tarjetas, ruéguele que piense un número de 0 a 31 inclusive, y pídale las tarjetas en las que figure el número que ha pensado. Se puede saber inmediatamente cuál fue. Basta para ello sumar los números que encabezan las tarjetas que le han sido devueltas.

¿Por qué es así? Cada número aparece en una sola combinación de tarjetas y esta combinación equivale a la notación binaria de ese número. Al sumar los números que encabezan las tarjetas, lo que se está haciendo es, sencillamente, sumar las potencias de 2 indicadas por los 1 de la expresión binaria del número pensado. Puede disimularse aún más el artificio utilizando tarjetas de cinco colores diferentes. Podríamos entonces quedarnos en el otro extremo de la pieza y pedirle a nuestro amigo que se guardara en el bolsillo derecho las tarjetas que contienen su número y las restantes en el otro. Evidentemente, es necesario poder observar esta operación y recordar qué potencia de dos va asociada con cada color. Otra posible presentación podría consistir en disponer las cinco fichas (esta vez todas del mismo color) en fila sobre una mesa; siempre situado en el otro extremo de la habitación, pídale a su amigo que vuelva boca abajo las que lleven su número. Si se conoce en qué orden se encuentran

Números binarios

	16	8	4	2	1
0					0
1					1
2				1	0
3				1	1
4			1	0	0
5			1	0	1
6			1	1	0
7			1	1	1
8		1	0	0	0
9		1	0	0	1
10		1	0	1	0
11		1	0	1	1
12		1	1	0	0
13		1	1	0	1
14		1	1	1	0
15		1	1	1	1
16	1	0	0	0	0
17	1	0	0	0	1
18	1	0	0	1	0
19	1	0	0	1	1
20	1	0	1	0	0
21	1	0	1	0	1
22	1	0	1	1	0
23	1	0	1	1	1
24	1	1	0	0	0
25	1	1	0	0	1
26	1	1	0	1	0
27	1	1	0	1	1
28	1	1	1	0	0
29	1	1	1	0	1
30	1	1	1	1	0
31	1	1	1	1	1

Tarjetas para la transmisión del pensamiento

				1
			2	
			3	3
		4		
		5		5
		6	6	
		7	7	7
	8			
	9			9
	10		10	
	11		11	11
	12	12		
	13	13		13
	14	14	14	
	15	15	15	15
16				
17				17
18			18	
19			19	19
20		20		
21		21		21
22		22	22	
23		23	23	23
24	24			
25	25			25
26	26		26	
27	27		27	27
28	28	28		
29	29	29		29
30	30	30	30	
31	31	31	31	31

Figura 1. *Los números de las tarjetas (derecha) se basan en los números binarios (izquierda).*

los números que las encabezan, basta observar cuáles son las tarjetas que se han vuelto para conocer los números que hay que sumar.

La colección de tarjetas de la figura 2 aclara de manera divertida el fundamento binario de la clasificación de fichas perforadas. Es sencillo construirlas con 32 tarjetas corrientes. El diámetro de los agujeros debe ser ligeramente superior al de un lápiz. Quizá lo más adecuado sea perforar los cinco orificios en una de las tarjetas y luego usar ésta a modo de plantilla para recortar las demás. Si no se dispone de perforadora, y es preciso recortar los agujeros con tijeras, el trabajo se abrevia cortando las tarjetas de tres en tres. Asimismo, es conveniente recortar el ángulo superior derecho, para que sea fácil conservar las tarjetas en la posición adecuada. Una vez perforadas las tarjetas a lo largo del margen superior, algunos de los orificios se transforman en ranuras, como se muestra en la ilustración. Estas ranuras se corresponden con el dígito 1. Los agujeros que quedan se corresponden con el 0. De este modo, cada tarjeta puede interpretarse como un número binario. Sus números van de 0 a 31, aunque en la ilustración las tarjetas están desordenadas. Con ellas es posible realizar tres interesantes ejercicios, no muy conocidos. La construcción de las tarjetas tal vez pueda resultar algo tediosa; pero seguro que a toda la familia le gustará jugar con ellas.

El primer ejercicio consiste en clasificar rápidamente las fichas y dejarlas en el orden de sus números. Se mezclan las tarjetas a capricho, y se cuadran como si fueran las cartas de una baraja. Se pasa un lápiz por el agujero *E* y se levanta como un par de centímetros. Aproximada-

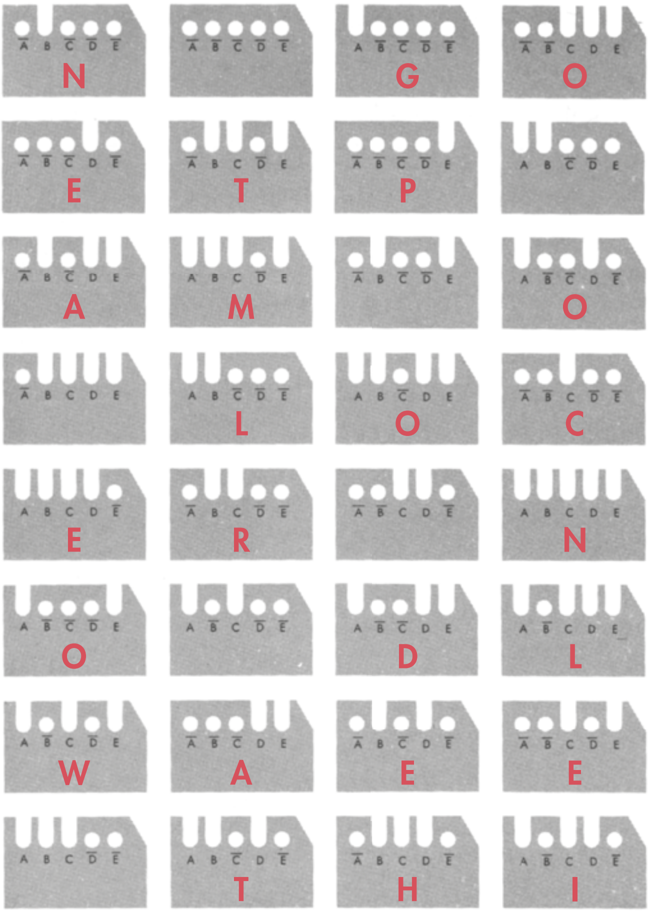

Figura 2. *Una serie de tarjetas perforadas que permiten descifrar un mensaje, adivinar un número y resolver problemas lógicos.*

mente la mitad de las fichas se quedarán enganchadas al lápiz, y otras tantas quedarán sueltas. Se sacude un poco el lápiz para asegurarse que todas las tarjetas que deben caer así lo hacen, y se alza más el lápiz para que el mazo de tarjetas quede separado en dos mitades. Después se saca el lápiz y se coloca este paquete *delante* del que se soltó. Se repite este procedimiento con cada uno de los restantes agujeros, yendo de derecha a izquierda. Tras la quinta clasificación, tal vez le sorprenda un poco el que las fichas hayan quedado en orden, comenzando por 0 en la que tiene enfrente. ¡Hojéelas y podrá leer un mensaje navideño!

El segundo ejercicio consiste en utilizar las tapetas como una calculadora que permite encontrar el número elegido en el juego de «transmisión del pensamiento» descrito anteriormente. Se comienza con las fichas en cualquier orden. Se pasa el lápiz por el orificio *E* y se pregunta si el número que se ha elegido aparece en la ficha encabezada por 1. Si la respuesta es afirmativa, se alza el lápiz y se desechan todas las tarjetas que arrastre. Si es negativa, se desechan en cambio las que queden sobre la mesa. Queda entonces un paquete de dieciséis tarjetas. Se pregunta ahora si el número aparece en la ficha encabezada por 2; y se repite el procedimiento con el lápiz esta vez en el agujero *D*. Continúese de este modo con las fichas restantes hasta quedarse con una sola tarjeta, cuyo número binario será el número buscado. Si se prefiere, puede escribirse en cada tarjeta la traducción decimal de su número binario, evitándose tener que efectuarla al final.

En el tercer ejercicio, se utilizan estas fichas como una calculadora lógica según un método inicialmente propuesto por el economista y lógico inglés William Stanley Jevons. El «ábaco lógico» de Jevons, para usar sus propios términos, estaba formado por plaquitas de madera en cuyo dorso llevaban unas horquillas de acero que permitían levantarlas; pero las fichas perforadas funcionan exactamente de la misma manera y son mucho más sencillas de realizar. Jevons inventó asimismo un complicado mecanismo, que él llamó «el piano lógico», que funcionaba sobre los mismos principios; con las fichas perforadas puede hacerse todo lo que pudiera permitir aquel piano, y aún más, pues la capacidad del piano era de cuatro términos y con las tarjetas pueden manejarse cinco.

Los cinco términos *A*, *B*, *C*, *D* y *E* están representados por los cinco agujeros, que a su vez representan dígitos binarios. Cada 1 (es decir, cada ranura) corresponde a un término verdadero; cada 0, a uno falso. Se usa una raya superpuesta a una letra para indicar que se trata de un término falso; las letras no señaladas corresponden a términos verdaderos. Cada ficha es una combinación única de términos verdaderos y falsos, y dado que las 32 fichas agotan todas las combinaciones posibles, constituyen el equivalente de lo que se llama una «tabla de verdad» para los cinco términos. El manejo de las fichas queda perfectamente aclarado mostrando cómo se las puede utilizar para resolver un problema de lógica de dos valores, o bivalente.

El siguiente problema ha sido extraído de *More Problematical Recreations,* un folleto recientemente publicado por Litton Industries, de Beverly Hills, California. «Si Sara no quiere, Wanda quiere». Es imposible que los asertos «Sara quiere» y «Camila no puede» se verifiquen al mismo tiempo. «Si Wanda quiere, Sara quiere y Camila puede». Así, pues, Camila puede. ¿Es exacta esta conclusión?

Para resolver este problema se toman las fichas perforadas en un orden cualquiera. Solamente intervienen tres términos, y por tanto nos limitaremos a los orificios *A, B y C.*

A = Sara quiere
$\bar{A}$ = Sara no quiere
B = Wanda quiere
$\bar{B}$ = Wanda no quiere
C = Camila puede
$\bar{C}$ = Camila no puede

El problema tiene tres premisas. La primera –«Si Sara no quiere, Wanda quiere»– nos dice que no es permisible la combinación de $\bar{A}$ y $\bar{B}$; por consiguiente hay que eliminar todas las fichas que la contengan. Para ello se introduce el lápiz por el agujero A y elevamos el mazo. Todas las fichas arrastradas contienen $\bar{A}$. Conservando este grupo, se introduce el lápiz en el agujero B y se alza de nuevo. El lápiz arrastrará esta vez todas las tarjetas que llevan $\bar{A}$ y $\bar{B}$, es decir, la combinación prohibida; así que habrá que desecharlas. Las fichas restantes se agrupan de nuevo en un solo mazo (el orden carece de importancia), y se puede considerar ahora la segunda premisa.

La premisa dos es que «Sara quiere» y «Camila no puede» no pueden ser ciertas a la vez. En otras palabras, la combinación $A\bar{C}$ está prohibida. Se inserta el lápiz en A y se retiran todas las fichas que llevan $\bar{A}$. Estas *no* son las fichas que buscamos; de manera que las dejaremos de lado por el momento y nos ocuparemos de las que restan del grupo A. Se inserta el lápiz en C y se retiran todas las fichas $\bar{C}$. Estas llevan la combinación prohibida $A\bar{C}$ por los que las desechamos definitivamente. Se reúnen de nuevo las tarjetas que nos quedan.

La última premisa nos dice que si «Wanda quiere, Sara quiere y Camila puede». Un momento de reflexión permitirá darse cuenta de que ésta elimina las dos combinaciones $\bar{A}B$ y $B\bar{C}$. Se mete el lápiz por el agujero A, se alza y se conservan las fichas retiradas de esta manera. Ahora se coloca el lápiz en B y se vuelve a alzar. No se arrastra ninguna ficha, lo cual significa que las dos premisas anteriores han eliminado ya la combinación $\bar{A}\bar{B}$. Dado que todas las fichas llevan $\bar{A}B$ (la combinación no válida), todo el mazo ha de ser definitivamente eliminado. Solamente nos queda la tarea de separar $B\bar{C}$ de las fichas que aún conservamos. El lápiz en B permite retirar las tarjetas B, que dejaremos provisionalmente de lado. Al meter el lápiz en C del paquete que nos queda, se constata que no sale carta alguna, lo que indica que la combinación prohibida $B\bar{C}$ ha sido ya eliminada en operaciones anteriores.

Nos hemos quedado así con ocho fichas, cada una de las cuales contiene una combinación de los valores verdaderos de A, B y C que cumple con las tres premisas del enunciado. Estas combinaciones son las líneas permitidas de una tabla de verdad construida combinando las tres proposiciones. Inspeccionándola, se observa que C