Martin Gardner

Carnaval matemático

Alianza editorial
El libro de bolsillo

Título original: *Mathematical Carnival*
Traductor: Andrés Muñoz Machado

Primera edición: 1980
Segunda edición: 2018

Diseño de colección: Estudio de Manuel Estrada con la colaboración de Roberto Turégano y Lynda Bozarth
Diseño de cubierta: Manuel Estrada

Calle Juan Ignacio Luca de Tena, 15
28027 Madrid
www.alianzaeditorial.es

ISBN: 978-84-9181-150-3
Depósito legal: M. 12.308-2018
Printed in Spain

Si quiere recibir información periódica sobre las novedades de Alianza Editorial, envíe un correo electrónico a la dirección: alianzaeditorial@anaya.es

Índice

A John Horton Conway,
cuyas continuas contribuciones a la matemática recreativa son únicas por su combinación de profundidad, elegancia y humor.

Introducción

Un profesor de matemáticas, por grande que sea su amor por la materia y fuerte su deseo de comunicación, se enfrenta de modo permanente con una dificultad agobiante: ¿Cómo mantener despiertos a sus alumnos?

El autor de un libro de matemáticas para profanos, por mucho interés que ponga en evitar el argot técnico y en hacer compatible el objeto de su obra con el interés del lector, se encuentra con un problema similar: ¿Cómo conseguir que sus lectores continúen pasando las páginas?

Las «nuevas matemáticas» han demostrado que en esto no sirven de nada. La idea era minimizar la memorización y hacer hincapié en «por qué» los procedimientos aritméticos funcionan. Desafortunadamente, los estudiantes encontraron que las leyes conmutativa, distributiva y asociativa y la terminología de la teoría elemental de conjuntos eran todavía más aburridas que la tabla de multiplicar. Profesores mediocres, en su lucha por enseñar las nuevas matemáticas, cayeron en una mediocridad mayor aún, y los pobres estudiantes no aprendían casi nada, como no fuese una terminología que nadie empleaba, salvo los educadores que la habían inventado. Se escribieron unos cuantos libros para explicar las nuevas matemáticas a los adultos, pero resultaron más tediosos aún que las obras acerca de la vieja matemática. Al final, incluso los profesores llegaron a cansarse de recordar a los alumnos que lo que estaban escribiendo era un numeral y no un número. El libro de Morris Kline, *Why Johnny Can't Add** asestó el *coup de grace.*

Siempre he creído que el mejor camino para hacer las matemáticas interesantes a alumnos y profanos es acercarse a ellas en son de juego. En niveles superiores, especialmente cuando se aplican a problemas prácticos, las matemáticas pueden y deben ser mortalmente serias. Pero en niveles inferiores no es posible motivar a ningún alumno a aprender la teoría superior de grupos, por ejemplo, diciéndole que la encontrará hermosa, estimulante o incluso útil si algún día llega a ser un físico especializado en partículas. El mejor método para mantener despierto a un estudiante es seguramente proponerle un juego matemático intrigante, un pasatiempo, un truco mágico, una chanza, una paradoja, un modelo, un trabalenguas o cualquiera de esas mil cosas que los profesores aburridos suelen rehuir porque piensan que son frivolidades.

* Hay trad. castellana: *¿Por qué Juanito no sabe sumar? El fracaso de las matemáticas modernas,* Siglo XXI, Madrid, 1976.

Nadie dice que un educador no haga otra cosa que proponer pasatiempos a sus alumnos. Y un libro para profanos que solo ofrezca pasatiempos es igual de ineficaz para enseñar unas matemáticas significativas. Lo que tiene que haber, evidentemente, es un juego recíproco entre seriedad y frivolidad. La frivolidad mantiene alerta al lector. La seriedad hace que el juego merezca la pena.

Esa es la clase de mezcla que he tratado de conseguir en mi columna de *Scientific American* desde que la inicié en diciembre de 1956. Hasta ahora se han editado seis libros que recogen mis artículos en esta publicación. Este es el séptimo. Al igual que en los volúmenes anteriores los artículos han sido revisados, ampliados y puestos al día, habiéndose incluido además valiosas observaciones de los lectores.

Los asuntos que toca el libro son tan variados como las comparsas, desfiles y carrozas de un carnaval ambulante. Espero que el lector que deambule por este abigarrado festival matemático, bien porque como profesional pertenezca al cotarro, bien en calidad de visitante, disfrute de la algarabía de los chistes y juegos. Si es así, tal vez se maraville, al terminar la lectura, de la cantidad de matemáticas no triviales que ha aprendido, sin habérselo propuesto.

Martin Gardner
Abril, 1975

1. El drago y las coles de Bruselas*

I made sprouts fonianeously...

James Joyce. *Finnegans Wake*

«Un amigo mío, estudiante de clásicas en Cambridge, me enseñó hace poco un juego, denominado "drago", que hizo furor allí el trimestre pasado. El juego tiene un curioso sabor topológico».

Así comenzaba una carta que recibí en 1967 de David Hartshorne, alumno de matemáticas en la Universidad de Leeds. Poco después me escribieron otros lectores ingleses sobre este divertido juego de lápiz y papel que había brotado de pronto en las aulas de Cambridge.

Me complace señalar que acerté a localizar los orígenes mismos del juego: el esfuerzo creativo conjunto de John Horton Conway, profesor de matemáticas en el Sidney Sussex College, Cambridge, y Michael Stewart

* El nombre inglés de los dos juegos propuestos en este capítulo es *sprouts* y *Brussels sprouts*. Como traducción del primero he escogido el nombre de «drago», por la forma en que ramifica este bonito árbol tropical. *[N. del T.]*

Paterson, a la sazón estudiante graduado que trabajaba en la misma universidad sobre teoría abstracta de programación de computadores.

El juego se comienza dibujando *n* puntos sobre una hoja de papel. Conviene que los principiantes empiecen con no más de tres o cuatro puntos, porque, incluso así, resulta ya más difícil de analizar que el tres en raya. Un movimiento consiste en trazar una línea que una un punto con otro o consigo mismo y luego trazar sobre ella, en cualquier lugar, un nuevo punto. Deben observarse las siguientes restricciones:

1. La línea puede tener cualquier forma pero sin cortarse a sí misma, cruzar otra ya dibujada ni pasar por un punto previamente dibujado.
2. De ningún punto podrán salir más de tres líneas.

Los jugadores trazan curvas por turno. En el drago normal, la manera recomendada de jugar, gana la última persona que es capaz de mover. Como en el nim y otros juegos de ir quitando piezas, puede jugarse a la inversa, esto es, como en ciertos juegos de cartas en los que cada jugador trata de *no hacer* bazas. En esta modalidad el primer jugador que no puede mover, gana.

El juego típico de tres puntos que muestra la Figura 1 fue ganado en el séptimo movimiento por el primer participante. Es fácil ver de dónde procede el nombre del juego, ya que da lugar a fantásticas figuras ramificadas a medida que progresa. El rasgo más atractivo es que no se trata simplemente de un juego combinatorio, como muchos de los juegos de unir puntos, sino que el drago explota realmente las propiedades topológicas del plano. Por decirlo en un lenguaje más técnico, hace uso del teorema de Jordan que demuestra que una curva simple cerrada divide al plano en dos regiones, una interior y otra exterior.

Diríase a simple vista que una partida de drago puede proliferar eternamente, pero Conway ha ofrecido una prueba sencilla de que debe terminar como máximo en el movimiento $3n$-1. Cada punto tiene tres «vidas», las tres líneas que pueden converger en él. Un punto provisto ya de tres líneas se denomina «punto muerto», ya que no pueden trazarse más curvas ni a él ni desde él. Un juego que comienza con n puntos tiene una vida potencial de $3n$. Cada movimiento mata dos vidas, una al principio y otra al final de la curva, pero añade un nuevo punto cuya vida es 1. Por lo tanto, cada movimiento hace decrecer en 1 la vida total del juego. Una partida está claro que no puede continuar cuando solamente le queda una vida, ya que se requieren al menos dos para hacer una jugada. Así pues, ninguna partida puede durar más de $3n$-1 movimientos. Es fácil mostrar que cualquier partida puede durar al menos $2n$ movimientos. El juego de tres puntos comienza con nueve vidas, debe terminar en el octavo movimiento o antes, y dura como mínimo seis jugadas.

El juego de un punto es trivial. El primer jugador tiene solamente un movimiento posible: unir el punto consigo mismo. El segundo gana en la partida normal (pierde en la inversa) uniendo los dos puntos, bien sea por dentro o por fuera de la curva cerrada. Estos dos movimientos son equivalentes en lo que se refiere a la práctica del juego, ya que antes de hacerlos no hay manera de distinguir entre interior y exterior de la curva cerrada. Imaginemos que jugamos sobre la superficie de una esfera. Si pinchamos la esfera por un punto dentro de una curva cerrada, podemos estirar la superficie en un plano de tal forma que todos los puntos que previamente estaban fuera de la curva queden dentro, y al revés. Es importante retener en la memoria esta equivalencia topológica de interior y exterior, ya que simplifica de forma importante el análisis de los juegos que comienzan con más de dos puntos.

Con dos puntos iniciales el drago cobra pronto interés. El primer jugador parece que puede escoger entre cinco posibilidades de salida (Figura 2), pero la segunda y la tercera son equivalentes por razones de simetría; lo mismo ocurre con la cuarta y la quinta y, a la luz de la equivalencia interior-exterior que acabamos de explicar, los cuatro movimientos cabe considerarlos idénticos. Por lo tanto, solo es necesario contemplar dos posibilidades topológicamente distintas. No es difícil establecer un diagrama de árbol en el que las diferentes ramas muestren todos los movimientos posibles y cuya inspección haga ver que, tanto en la forma normal como en la inversa del juego de dos puntos, el segundo participante puede ganar siempre.

Conway encontró que el primer jugador puede ganar siempre en el juego normal de tres puntos, y el segundo en la versión inversa. Denis P. Mollison, un estudiante de matemáticas de Cambridge, ha mostrado que el primer jugador tiene las de ganar en los juegos normales de cuatro y cinco puntos. A raíz de una apuesta de diez chelines con Conway a que no podría completar su análisis en un mes, Mollison probó en un artículo de 49 páginas que

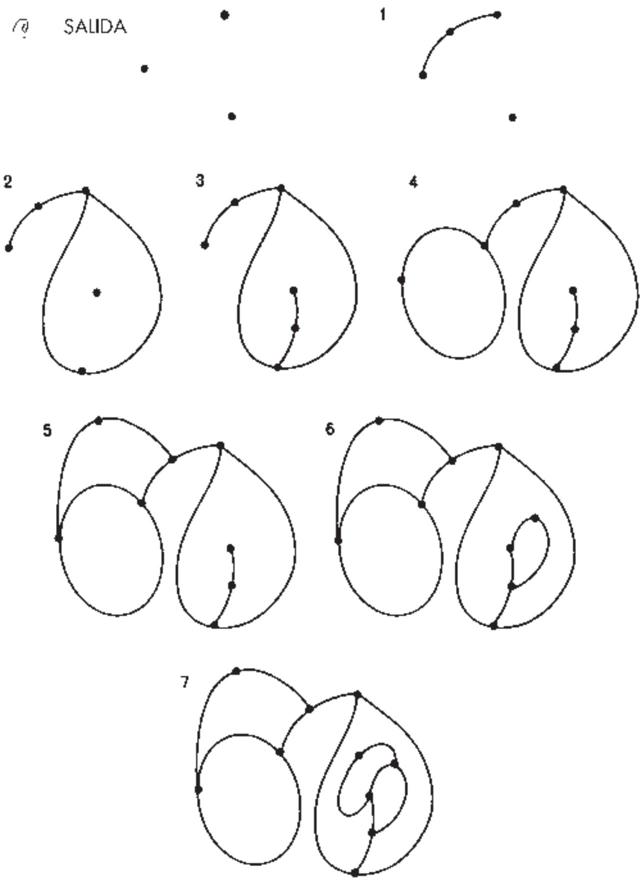

Figura 1. Un ejemplo de partida de drago con tres puntos iniciales.

el segundo jugador gana en el juego normal de 6 puntos. Nadie sabe hasta el momento quién tiene las de ganar en juegos inversos que comiencen con más de 4 puntos. Se han hecho trabajos sobre los juegos normales de 7 y 8 puntos, pero no tengo noticia de ningún resultado confirmado. Ni tampoco sé de nadie que haya redactado un programa de computador satisfactorio para analizar el drago.

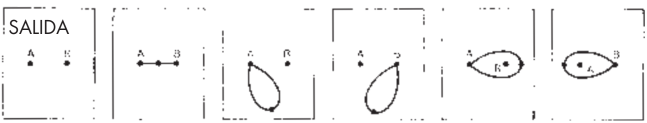

Figura 2. Puntos de salida (A y B) y movimientos posibles de apertura del primer jugador en el juego de dos puntos.

Aunque no se ha formulado ninguna estrategia para jugar perfectamente, hacia el final de la partida se puede ver a menudo cómo trazar curvas cerradas que dividan el plano en regiones de tal manera que se consiga el triunfo. La posibilidad de esta clase de planificación convierte el drago en un reto intelectual y permite al jugador mejorar su destreza. Pero el drago está lleno de formas de crecimiento inesperadas y, al parecer, no hay ninguna estrategia que conduzca a una victoria segura. Conway estima que un análisis completo del juego de ocho puntos está más allá de las posibilidades de los computadores actuales.

El drago fue inventado en la tarde del martes 21 de febrero de 1967, cuando Conway y Paterson habían terminado de tomar el té en la sala de reuniones del Departamento de Matemáticas y estaban garabateando sobre una hoja con la intención de idear un nuevo juego de lápiz y papel. Conway había estado trabajando sobre un juego inventado por Paterson que originalmente consistía en plegar sellos pegados unos a otros. Paterson lo había remodelado de manera que pudiera llevarse a cabo sobre una hoja de papel. Habían estado pensando en diversas maneras de modificar las reglas, cuando Paterson preguntó: «¿Por qué no poner un nuevo punto sobre la línea?».

«Tan pronto como se adoptó esta regla –me escribía Conway–, desechamos todas las demás, la posición de salida se redujo a *n* puntos y el drago proliferó». La importancia de añadir el nuevo punto fue tan grande, que todos los observadores coinciden en atribuir 3/5 del mérito a Paterson y 2/5 a Conway. «Y hay complicadas reglas –añade Conway– según las cuales tenemos previsto repartirnos los beneficios que pudieran derivarse del juego».

> Al día siguiente de nacer el drago –prosigue Conway–, parecía que todo el mundo lo estaba jugando. A la hora del café o del té se veían pequeños grupos de personas enfrascados en posiciones de drago que iban desde lo ridículo a lo fantástico. Algunos estaban ya atacando el juego sobre formas toroidales, botellas de Klein y similares, y al menos una persona estaba pensando en versiones de mayor número de dimensiones. El personal de secretariado no se mostró inmune; se podían encontrar restos de juegos en los lugares más inverosímiles. Cada vez que trato hoy de enseñarle a alguien el juego, resulta que ya ha oído hablar de él por no sé qué ca-

nal indirecto. Incluso mis hijas de tres y cuatro años lo juegan, aunque normalmente logro ganarlas.

El nombre de *sprouts* se debe a Conway. Otro, el de «sarampión», lo propuso un graduado, ya que el juego es contagioso y comienza con puntos; pero fue *sprouts* la denominación por la que comenzó a ser rápidamente conocido. Conway inventó más adelante un juego aparentemente similar al que llamó «coles de Bruselas» *(Brussels sprouts)* para sugerir que se trataba de una broma. Lo voy a describir, pero dejaré al lector la tarea de averiguar por qué es una farsa, antes de dar la explicación en la sección de respuestas.

Las coles de Bruselas comienzan con *n* cruces en lugar de puntos. Un movimiento consiste en prolongar un brazo cualquiera de una cruz cualquiera, formando una curva que termine en la misma cruz o en el brazo libre de cualquier otra. A continuación se traza una nueva barra transversal en cualquier lugar a lo largo de la curva, creando así una nueva cruz. Dos de sus brazos estarán muertos, ya que ninguno puede emplearse dos veces. Al igual que en el drago, ninguna curva puede cortarse a sí misma ni a ninguna otra que se haya trazado previamente, ni puede pasar por una cruz anteriormente dibujada. Y al igual que allí, el ganador del juego normal es la última persona en jugar, o, si se juega en la forma inversa, la primera persona que no puede hacer un movimiento.

Después de jugar al drago, las coles de Bruselas parecen, al principio, una versión más complicada, más elaborada. Como en cada movimiento se matan dos brazos y se añaden otros dos vivos, parece que el juego no tiene fin.

Sin embargo, todas las partidas terminan, porque hay una broma oculta que el lector descubrirá si logra analizar el juego. Para aclarar las reglas, mostramos un juego normal de dos cruces que termina con la victoria del segundo jugador en el octavo movimiento (Figura 3).

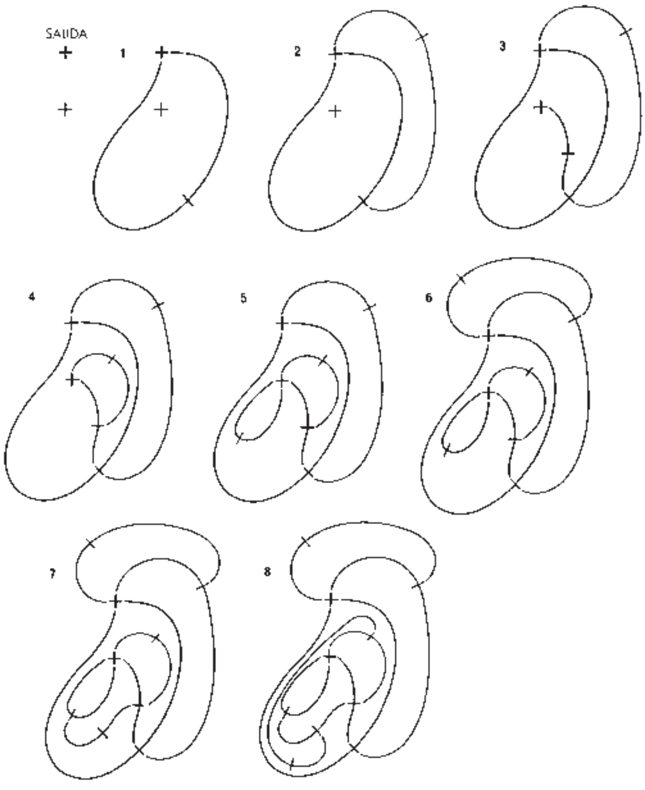

Figura 3. Ejemplo de partida de «coles de Bruselas» con dos cruces iniciales.

Una carta de Conway informa de varios descubrimientos importantes en dragología. Figuran entre ellos un concepto al que denomina «el orden de moribundía» de una posición terminal y la clasificación de las posiciones de «orden cero» en cinco tipos básicos: piojo, escarabajo, cucaracha, tijereta y escorpión. Los insectos y arácnidos de mayor tamaño pueden estar infestados de piojos, a veces en forma anidada, y Conway traza una figura de la que dice que «no es más que una tijereta vuelta hacia afuera, dentro de un piojo vuelto hacia afuera». Algunas configuraciones, dice Conway, son mucho más «piojosas» que otras. Y luego tenemos el TFMOC (Teorema fundamental de la moribundía de orden cero), que es muy profundo. La dragología está extendiéndose tan rápidamente que tendré que posponer mi próximo artículo sobre ella por algún tiempo.

Anexo

El drago tuvo un impacto instantáneo en los lectores de *Scientific American,* muchos de los cuales sugirieron generalizaciones y variaciones del juego. Ralph J. Ryan III propuso sustituir cada punto por una flecha minúscula, que se prolonga desde un lado de la línea y que solo permite trazar nuevas líneas a la punta del vector. Gilbert W. Kessler combinó los puntos y las barras de las cruces en un juego al que denominó *succotash* (plato amerindio consistente en maíz verde y frijoles puestos a cocer conjuntamente). George P. Richardson investigó el drago sobre toros y otras superficies. Eric L. Gans estudió una generalización de las coles de Bruselas (llamada «coles belgas») en la que los puntos se reemplazan por «estrellas», n brazos transversales que se cruzan en un punto. Vladimir Ignetovich sugirió la regla de que cada jugador, en su turno, pueda escoger entre añadir uno, dos o ningún punto a su línea.

Varios lectores pusieron en duda la afirmación de que cualquier juego normal de drago debe durar al menos $2n$ movimientos. Enviaron lo que creían contraejemplos, pero en todos los casos olvidaban que cada punto aislado permite dos movimientos adicionales.

Respuestas

¿Por qué el juego denominado coles de Bruselas, que parece una versión más sofisticada del drago, es una farsa, según su inventor John Horton Conway? La respuesta es que es imposible jugarlo ni bien ni mal, ya que cada partida debe terminar exactamente a los $5n$-2 movimientos, siendo n el número de cruces iniciales. Jugado en su forma normal (el último en jugar es el ganador), siempre gana el primer jugador si se comienza con un número impar de cruces y el segundo si lo hace con un número par. (Lo contrario es cierto, desde luego, en la modalidad inversa.) Después de enseñar a alguien el juego del drago, que es una competición genuina, se puede cambiar al falso juego de las coles de Bruselas, hacer apuestas y saber siempre por adelantado quién va a ganar la partida. Dejo al lector la tarea de demostrar que cualquier juego debe terminar al cabo de $5n$-2 movimientos.