Carlo Frabetti

# El hombre ameba

## y otras ideas geniales

Alianza editorial
El libro de bolsillo

Diseño de colección: Estudio de Manuel Estrada con la colaboración de Roberto Turégano y Lynda Bozarth
Diseño de cubierta: Manuel Estrada
Fotografía de Lucía M. Diz


Calle Juan Ignacio Luca de Tena, 15
28027 Madrid
www.alianzaeditorial.es

ISBN: 978-84-9181-550-1
Depósito legal: M. 9.737-2019
Printed in Spain

Si quiere recibir información periódica sobre las novedades de Alianza Editorial, envíe un correo electrónico a la dirección: alianzaeditorial@anaya.es

# Índice

A Juan Manuel Rodrigo Ghiozzi, el niño de curiosidad insaciable e inteligencia excepcional con el que discutí muchos de los temas tratados en este libro. *In memoriam.*

## A modo de introducción
# Jugadas maestras

Al igual que *¿El huevo o la gallina?* y *El diablillo de Einstein,* este libro retoma algunos de los temas tratados en mi sección «El juego de la ciencia», que se publica semanalmente en «Materia», el suplemento científico de *El País digital.* No es una mera recopilación de artículos (que tendría poco sentido estando disponibles en la red, acompañados, además, de los numerosos –y a menudo muy interesantes– comentarios que suscitaron en su momento), sino el resultado de seleccionar, ampliar y complementar los temas más relevantes y menos coyunturales tratados en la sección, con un criterio unificador que resulta evidente sin más que echar una ojeada al índice.

Cada capítulo está dedicado a un autor (científico, filósofo, escritor) y a alguna de sus ideas más geniales e influyentes, en un intento de ofrecer un panorama –no completo, obviamente, pero sí bastante amplio– de los conceptos y enfoques que han configurado nuestra actual visión del mundo (del mundo físico, me apresuro a aclarar, pues eso es lo que explica la ausencia de mujeres, cuyo papel ha sido y es, en general, mucho más relevante en el terreno de la ética y las transformaciones sociales).

Si la ciencia es un juego (un juego en el que nuestro contrincante –no siempre amistoso– es el universo), estas son algunas de las jugadas maestras, de esas que arrancan una exclamación de asombro y admiración (y a veces también un estremecimiento de inquietud). Jugadas en las que puedes participar no solo como espectador(a), sino haciéndolas tuyas, reproduciéndolas en tu mente, reviviendo las experiencias de los jugadores más expertos. Como en los dos libros anteriores, en este encontrarás numerosos acertijos lógicos que, como eslabones mentales, unen unos temas con otros, y que te invito a intentar resolver antes de leer las soluciones. Cada final de capítulo y cada línea de blanco entre párrafos pretenden ser una pausa para la reflexión. Y es ahí, en esos espacios en blanco, donde puedes encontrar lo mejor del libro.

# El hotel de Hilbert

David Hilbert (1862-1943) fue uno de los matemáticos más importantes e influyentes de finales del siglo XIX y principios del XX. Con ocasión del Congreso Internacional de Matemáticas celebrado en París en el año 1900, Hilbert presentó una lista de 23 problemas sin resolver que él consideraba especialmente importantes, lista que en buena medida orientó el desarrollo de las matemáticas del siglo XX; algunos de esos problemas (como la famosa conjetura de Goldbach) aún no han sido resueltos.

Para ilustrar algunas paradojas del infinito, el gran matemático alemán imaginó un hotel de infinitas habitaciones, en el que te invito a alojarte por un día (o por toda la eternidad).

Pero, ay, cuando llegas al hotel de Hilbert resulta que sus infinitas habitaciones están todas ocupadas. Sin embargo, la recepcionista te guiña un ojo y te dice que, con la amable colaboración de los huéspedes, puede conseguir que quede libre una habitación para ti. ¿Cómo?

El amable trato recibido en el hotel de Hilbert te anima a presentarte allí, unos días después, en compañía de infinitos amigos. El hotel está completo, pero, una vez más, y con la amable colaboración de los huéspedes, la recepcionista consigue alojaros a ti y a tu comitiva infinita. ¿De qué manera?

En realidad, no hay un hotel de Hilbert, sino infinitos, y todos ellos con infinitas habitaciones. Un día, para ahorrar gastos, deciden cerrarlos todos menos uno; pero todas las habitaciones de todos los hoteles están ocupadas, por lo que hay que trasladar a todos esos huéspedes al único hotel que queda abierto, y de forma que cada huésped tenga su propia habitación. ¿Es ello posible?

# El libro infinito de Smullyan

Aunque el hotel de Hilbert esté completo, para conseguir una habitación libre bastará con que cada huésped se traslade a la habitación contigua: el de la 1 a la 2, el de la 2 a la 3, el de la 3 a la 4, y así sucesiva e indefinidamente; de este modo, la habitación 1 quedará libre.

Para que queden libres infinitas habitaciones, cada huésped se puede trasladar a la habitación cuyo número es el doble del de la que ocupa: el de la 1 se traslada a la 2, el de la 2 a la 4, el de la 3 a la 6… De este modo quedarán libres las infinitas habitaciones de número impar.

Para alojar en un solo hotel a los infinitos huéspedes de los infinitos hoteles de Hilbert, asignamos a cada huésped un par de números, el primero corresponde al hotel en el que se aloja y el segundo es su número de habitación; así, al huésped que ocupa la habitación 1 del primer hotel le asignamos el par 1-1, al que ocupa la habitación 2 del primer hotel el 1-2, al de la habitación 1 del segundo hotel el 2-1… Ahora el problema es análogo al de numerar todas las parejas de números naturales posibles. ¿Cómo podemos hacerlo? Muy fácil: a la pareja 1-1 le asignamos el 1; a la pareja 1-2, el 2; a la pareja 2-1, el 3; a la pareja 2-2, el 4; a la pareja 2-3, el 5; a la pareja 3-2, el 6; a la pareja 3-3, el 7… Es decir, ordenamos las parejas de menor a mayor según lo que sumen los dos números de cada una, y las que suman igual las ordenamos de acuerdo con su primer número, y a medida que las ordenamos, las vamos numerando. Ahora cada huésped de la infinitamente infinita cadena Hilbert le corresponde un número, y ese será su número de habitación en el hotel que queda abierto.

La mejor –y la más divertida– introducción al tema del infinito y sus inquietantes paradojas que conozco es el libro de Raymond Smullyan *Satán, Cantor y el infinito*.

Raymond Smullyan (1919-2017) fue un matemático, lógico y filósofo estadounidense que escribió los que muchos consideran los mejores libros de acertijos lógicos del siglo XX, entre los que destacan: *¿Cómo se llama este libro?, Alicia en el país de las adivinanzas* y *¿La dama o el tigre?* También desarrolló una notable actividad como músico, humorista y mago, y escribió una admirable introducción al taoísmo: *Silencioso Tao*.

Veamos algunos de los problemas sobre el infinito propuestos por Smullyan; pero antes dejemos clara la definición que se maneja en matemáticas sobre este concepto:

> Decimos que un conjunto es finito si existe un número natural (entero y positivo) N tal que el conjunto tiene exactamente N

elementos (lo que significa que los elementos del conjunto pueden ponerse en correspondencia uno a uno con los números enteros positivos de 1 a N). Si no existe un tal número N, el conjunto es infinito.

Obsérvese que se trata de una definición por exclusión: conjunto infinito es el que no es finito. Y ahora que cuentas con una definición precisa, intenta articular una demostración rigurosa de lo obvio, cosa que a menudo es menos fácil de lo que parece: demuestra que si a un conjunto infinito le quitamos un elemento, sigue siendo infinito. Si lo tienes claro, ya puedes enfrentarte a estas tres preguntas de Smullyan:

- ¿Es numerable el conjunto de todos los conjuntos finitos de números naturales?
- ¿Y el conjunto de todos los conjuntos de números naturales, tanto finitos como infinitos?
- En cierto mundo con infinitos habitantes, todo conjunto de habitantes constituye un club. Al empadronador de ese mundo le gustaría dar a cada club el nombre de un habitante, de manera que no haya dos clubes con el mismo nombre y que cada habitante tenga un club que lleva su nombre. ¿Es ello posible?

Si al quitarle un elemento a un conjunto infinito A se convirtiera en un conjunto finito B, los elementos de B podrían ponerse en correspondencia de uno a uno con una sucesión finita de números naturales, digamos del 1 al n; por lo tanto, al devolverle a A el elemento quitado, podríamos ponerlo en correspondencia con los números del 1 al n+1, luego A no sería infinito.

Con todos los conjuntos finitos de números naturales podemos hacer lo mismo que hicimos con todas las parejas posibles: ordenarlos de menor a mayor según la suma de sus miembros; por lo tanto, son numerables.

Pero si consideramos también los conjuntos infinitos, la cosa cambia. El conjunto de todos los conjuntos de números naturales, incluidos los conjuntos infinitos, se denomina «conjunto potencia de N» o P(N), donde N es el conjunto de los números naturales, y P(N) no es numerable. Raymon Smullyan lo ilustra de la siguiente manera:

Imaginemos un libro con infinitas páginas numeradas: 1, 2, 3, 4…, en cada una de las cuales se describe un conjunto de números naturales. ¿Pueden estar en el libro todos los conjuntos posibles?

Supongamos que en la página n del libro está el conjunto N de todos los números en cuya página correspondiente hay un conjunto del que no forma parte el propio número de página. Parece un trabalenguas, pero es bastante sencillo: si, por ejemplo, en la página 3 del libro está el conjunto de los números impares, 3 no pertenece a N, puesto que en la página 3 hay un conjunto del que forma parte el número 3. Ahora bien, si n no forma parte del conjunto N, es un número que no forma parte del conjunto correspondiente a su página, y por tanto debería estar en N. Pero si está en N forma parte del conjunto correspondiente a su página, y por tanto no debería estar en N. Esta contradicción demuestra que en el libro no pueden estar todos los conjuntos posibles, lo que equivale a decir que no son numerables (es decir, que no pueden ponerse en correspondencia uno a uno con los números naturales, pues en ese caso podrían ponerse en correspondencia con las páginas de un libro infinito).

De lo anterior se desprende que el proyecto del empadronador del mundo de infinitos habitantes no es viable, pues dar a cada club posible el nombre de un habitante equivale a numerar el conjunto de todos los conjuntos de números naturales.

# El método elemental de Euclides

Como hemos visto en el capítulo anterior, hay infinitos de orden superior al de los números naturales, o sea, infinitos no numerables (que es una forma de decir que sus elementos no pueden ponerse en correspondencia de uno a uno con el conjunto de los números naturales). Pero ¿qué pasa con los números primos, tan escurridizos e inquietantes? Si hay conjuntos que están más allá del infinito, ¿está el conjunto de los primos más acá?

A medida que vamos avanzando en la sucesión de los números naturales, los primos son cada vez más escasos; de hecho, podemos encontrar dos primos sucesivos tan alejados como queramos (¿puedes demostrarlo?). ¿Significa eso que a partir de un cierto punto ya no habrá más números primos? Pues no: Euclides, que no solo fue el padre de la geometría, sino que también destacó en otras ramas de las matemáticas, demostró que hay infinitos números primos. ¿Puedes reconstruir su sencilla e ingeniosa demostración, ejemplo de un riguroso método deductivo que le permitió desarrollar una geometría casi perfecta?

Y así como los primos podrían parecer finitos pero no lo son, hay finitos que no lo parecen, o cuando menos son dudosos. Por ejemplo, se suele decir que el lenguaje es infinito, pero ¿lo es realmente? ¿Es infinito el número de libros escribibles? ¿Y el número de cuadros pintables?

Sea el número 1 × 2 × 3 × 4… × n, es decir, lo que en matemáticas se denomina «factorial de n» y se representa así: n!; es evidente que n! es divisible por todos y cada uno de los n primeros números, puesto que los contiene todos como factores, y por lo tanto n!+2 será divisible por 2, n!+3 será divisible por 3… y n!+n será divisible por n. Tendremos, pues, n-1 números consecutivos no primos (de n!+2 a n!+n), y como n puede ser tan grande como queramos, no hay límite para la distancia a la que pueden hallarse dos primos sucesivos.

Y si los primos están cada vez más dispersos, son cada vez menos frecuentes, ¿no llegará un momento en el que no habrá ninguno más? Pues no, el conjunto de los números primos es infinito, y Euclides lo demostró con un razonamiento muy similar al anterior. Supongamos que n es el mayor primo existente y consideremos el número n!+1; puesto que n! es múltiplo de los n primeros números, al dividir n!+1 por cualquiera de ellos dará de resto 1, y por lo tanto solo hay dos posibilidades: o n!+1 es primo, o si es compuesto sus factores primos son mayores que n; por lo tanto n, por grande que sea, no puede ser el mayor primo, lo que equivale a decir que hay infinitos números primos.

En cuanto al número de libros escribibles, es finito (aunque, eso sí, inconcebiblemente grande). Dada una lengua con n caracteres (incluido el espacio en blanco), una página estándar de 2.000 caracteres «solo» se puede escribir de $n^{2.000}$ formas diferentes.

¿Y el número de cuadros pintables? Tampoco es infinito. Supongamos que hace falta un máximo de n píxeles para componer un cuadro cualquiera de forma plenamente satisfactoria para la capacidad visual humana; cada píxel puede ser blanco, negro o de uno de los tres colores primarios, y por tanto el número de cuadros posibles es $5^n$. Y en esas $5^n$ imágenes están incluidas, además, todas las fotografías (en color o blanco y negro) habidas y por haber, todos los grabados, dibujos, diagramas… Y todos los textos también, en todos los idiomas reales o imaginarios: el número de páginas escribibles es un insignificante subconjunto del número de imágenes posibles.

# La predicción universal de Verne

Obviamente, el infinito existe como entelequia y como concepto matemático. Pero cuando preguntamos si existe Dios, no nos referimos a su existencia como idea, sino a algo más real y operativo, y lo mismo cabe preguntarse con respecto al infinito. ¿Hay algo realmente infinito en el mundo físico? ¿Es infinito el propio universo?

Si el universo fuera infinito y homogéneo (tan homogéneo como un bizcocho en el que el hidrógeno es la harina, el helio el azúcar y todo lo demás las pasas, según una vieja imagen popularizada por los cosmólogos), todo lo que no es imposible sucedería, y además infinitas veces. Da vértigo asomarse tan siquiera por un instante a tal posibilidad, y de hecho es uno de los argumentos que algunos esgrimen para negar que el universo pueda ser infinito.

En cualquier caso, los cosmólogos no acaban de ponerse de acuerdo sobre la finitud o infinitud del universo. Lo cierto es que, aunque algunas teorías parecen más plausibles que otras, no sabemos con certeza si el universo es finito o infinito, abierto o cerrado, único o múltiple…

He aquí un binomio/dilema tan inquietante como el que nos ha ocupado últimamente –¿finito o infinito?– y directamente relacionado con él. ¿Tenemos claro lo que es posible y lo que no lo es?

Si en un universo infinito se hiciera realidad, por pura certeza estadística, todo lo que no es imposible, ¿habría, sagaz lector(a), infinitas personas idénticas a ti? ¿Y otras tantas idénticas a ti pero con alas? ¿Y caballos voladores como el mítico Pegaso? ¿Y niños de madera como Pinocho? ¿Y dioses como los grecolatinos, como Alá, como Jehová…?

Si el universo fuera infinito y homogéneo, la materia agotaría sus posibilidades combinatorias y las repetiría sin fin. La perogrullada filosófica «todo lo que es, es posible» sería cierta también a la inversa: «todo lo que es posible, es», y además es infinitas veces.

No es verosímil que la evolución produzca caballos voladores en un planeta parecido a la Tierra, con una atmósfera y una gravedad similares a las nuestras, ya que desarrollar alas no sería una ventaja evolutiva para los caballos, sino todo lo contrario, puesto que no podrían volar. Menos verosímil aún es que aparezcan espontáneamente niños de madera. Sin embargo…

> Entonces el viento sopló con fuerza y abrió las ventanas de la casa, se apagaron los candiles y una bella mujer vestida de rojo apareció en la puerta y dijo: «Todo lo que se nombra existe».

La bella mujer vestida de rojo es la diosa vasca Mari, y con su sobrecogedora sentencia termina un cuento tradicional sobre un niño que asegura haberla visto y al que nadie cree.

Lo que no se nombra no existe, dice George Steiner. Pero ¿existe todo lo que se nombra, como afirma categóricamente la diosa Mari? Por una vez, el pensamiento mágico confluye con el racionalismo más estricto, pues nada menos que el gran apóstol literario de la ciencia, Jules Verne, dijo que todo lo que una persona puede imaginar, otras pueden hacerlo realidad. Y puesto que los humanos acaban haciendo todo lo que pueden hacer, la sentencia de Verne equivale a predecir que todo acabará haciéndose realidad.

Volviendo a nuestro Pegaso, no es verosímil que un caballo con alas surja de la mera evolución, pero sí de la ingeniería genética. Y podría volar, bajo una gigantesca cúpula, en un parque temático construido en la Luna, donde la gravedad es seis veces menor que en la Tierra. Unas personas lo imaginaron hace tres mil años y otras podrían hacerlo realidad en un futuro no muy lejano.

Y si Collodi imaginó un niño de madera y nosotros podemos discutir sobre su existencia, no es imposible que un Geppetto dotado de instrumentos más sutiles que la gubia y el formón pueda engendrarlo algún día, o lo haya engendrado ya en un planeta similar al nuestro, pero más avanzado tecnológicamente.

Si hubiera múltiples universos regidos por distintas leyes, en principio nada sería imposible (¿o sí?). Pero en el marco de nuestro universo y de sus leyes tal como las conocemos, ¿dónde está el límite de lo posible? ¿Qué es lo que podemos asegurar que no existe, aunque el universo sea infinito?