New Scientist

El maravilloso mundo de las matemáticas

Alianza editorial
El libro de bolsillo

Título original: *How Numbers Work. Discover the strange and beautiful world of mathematics*
Publicado por primera vez en Gran Bretaña por John Murray Learning.

Traducción de Miguel Paredes Larrucea

Diseño de colección: Estrada Design
Diseño de cubierta: Manuel Estrada
Fotografía de Javier Ayuso

PAPEL DE FIBRA
CERTIFICADA

Calle Valentín Beato, 21
28037 Madrid
www.alianzaeditorial.es

ISBN: 978-84-1148-367-4
Depósito legal: M. 16.998-2023
Printed in Spain

Si quiere recibir información periódica sobre las novedades de Alianza Editorial, envíe un correo electrónico a la dirección: alianzaeditorial@anaya.es

Índice

Colaboradores

Colaboradores internos:

Editor: Richard Webb, redactor jefe de *New Scientist*
Editor de la serie *Instant Expert*: Alison George
Editor de *Instant Expert*: Jeremy Webb

Colaboradores externos:

Richard Elwes es autor de algunas partes del capítulo sobre el infinito y de la sección «El algoritmo que dirige el mundo» del capítulo 8. Es escritor, profesor e investigador en matemáticas, y profesor visitante en la Universidad de Leeds, Reino Unido. Su último libro es *Chaotic Fishponds and Mirror Universes* (2013).

Vicky Neale es la autora del material sobre la conjetura de los números primos gemelos del capítulo 5. Es profesora Whitehead en el Mathematical Institute y en el Balliol College en la Universidad de Oxford, Reino Unido, y autora de *Closing the Gap: The Quest to Understand Prime Numbers* (2017).

Regina Nuzzo es la autora de la sección sobre estadística frecuentista y bayesiana del capítulo 6. Es escritora, estadística y profesora en la Universidad Gallaudet, Washington DC, Estados Unidos.

Ian Stewart es autor de las secciones sobre el conjunto vacío del capítulo 2 y sobre las matemáticas electorales en el capítulo 8, así como de la conclusión sobre qué hace que las matemáticas sean especiales. Es profesor emérito de la Universidad de Warwick, Reino Unido, y autor de numerosos libros sobre matemáticas, el último de ellos *Calculating the Cosmos* (2017).

Nuestro agradecimiento también a los siguientes autores y editores:

Gilead Amit, Anil Ananthaswamy, Jacob Aron, Michael Brooks, Matthew Chalmers, Catherine de Lange, Marianne Freiberger, Amanda Gefter, Lisa Grossman, Erica Klarreich, Dana Mackenzie, Stephen Ornes, Timothy Revell, Bruce Schechter, Rachel Thomas, Helen Thomson.

Introducción

En 2014, la iraní Maryam Mirzakhani se convirtió en la primera mujer en obtener la más alta distinción en el campo de las matemáticas, la Medalla Fields. Para ella, las matemáticas eran a menudo como «estar perdida en la selva y tratar de reunir toda la información posible para encontrar nuevas pistas… Con un poco de suerte –agregaba–, es posible encontrar una salida».

Mirzakhani, que murió en julio de 2017 a los 40 años, se adentró en la selva matemática más que la mayoría. Este libro de la serie *New Scientist Instant Expert* está destinado a aquellos que deambulan por el borde en busca de una forma de entrar.

De grado o por fuerza, la mayoría de nosotros se ha hecho una idea del aspecto que tiene el territorio matemático. Hay símbolos, ecuaciones y formas geométricas. Hay problemas con respuestas correctas, verdades que son aparentemente universales y demostraciones que son lógicamente inatacables. Y sobre todo hay números.

Pero ¿qué relación guarda todo esto entre sí? ¿Qué hace que los números y las matemáticas sean especiales, y que algunos números y algunas partes de las matemáticas sean más especiales que otros? El tema es demasiado amplio como para aspirar a ofrecer aquí una visión completa, pero apoyándonos en el pensamiento de investigadores de primera línea y en lo mejor de *New Scientist* esperamos dar una idea.

Tras una breve introducción a la naturaleza y el ámbito de las matemáticas, comenzamos por donde todo comenzó: por las fascinantes propiedades de los números. Primero consideramos el cero y el infinito, los números primos y los inevitables bichos raros que son los «números trascendentes» e y π y la unidad imaginaria i. Tras una breve digresión por los problemas de la probabilidad y la estadística, llegamos a la vanguardia de los métodos matemáticos modernos y a ejemplos de cómo se aplican a áreas inesperadas de nuestras vidas, para considerar después el problema más profundo de todos: el de la relación que guardan exactamente las matemáticas con la realidad

Para muchas personas ajenas a este campo, la maravilla de las matemáticas estriba en que parecen ser un lenguaje universal que nos ayuda a comprender mejor el mundo. Muchos profesionales de las matemáticas estarían de acuerdo con esta apreciación, pero añadirían que su belleza radica en cómo, a partir de bases muy simples y utilizando solo las herramientas de la lógica abstracta más pura, se pueden crear mundos que parecen ir más allá del nuestro.

Mirzakhani estudió la geometría de una cosa llamada el espacio de móduli, que se puede concebir como un universo en el que cada punto es en sí mismo un universo. Y describió el número de formas en que un rayo de luz puede viajar por un bucle cerrado en un universo bidimensional, una solución que no se puede encontrar si uno se queda en su universo «de origen», sino solo haciendo un zoom hacia atrás y navegando por un multiverso completo.

Todo esto va más allá de lo que la mayoría de nosotros podemos aspirar a entender. Pero espero que el libro proporcione al lector un agradable viaje de descubrimiento matemático o, como mínimo, un camino de entrada.

Richard Webb, editor

1. ¿Qué son las matemáticas?

¿En qué consisten las matemáticas? ¿Son una invención o un descubrimiento? ¿Es algo que nos viene de forma natural o tenemos que aprenderlas? En torno al verdadero carácter de las matemáticas quedan muchas cuestiones por resolver…

Los pilares de las matemáticas

Para la mayoría de nosotros, las matemáticas significan números. La manipulación de los números es ciertamente el lugar donde comenzó el viaje matemático de la humanidad. Pero sobre esa base hemos construido un edificio formidable, un edificio mucho más grande.

La *aritmética* es lo que todos sabemos: suma, resta, división, multiplicación, etc. La capacidad de comprender y manejar los números en abstracto fue la parte de las matemáticas que primero se comenzó a desarrollar, formalmente hace ya más de seis milenios. Pero fue solo a partir de mediados del siglo XIX, con el desarrollo de la teoría de conjuntos, cuando se establecieron reglas lógicas estrictas para la manipulación aritmética.

Del desarrollo de la teoría de conjuntos se ocupan los capítulos 2 y 3, sobre el cero y el infinito, mientras que a los números se dedican los capítulos 4 y 5, que tratan de los números primos –los átomos del sistema numérico– y de otros números especialmente intrigantes como π, ϕ, *e* e *i*.

La *teoría de la probabilidad,* desarrollada a partir del siglo XVII, se basa en las reglas de la aritmética para crear un conjunto de leyes con que tratar el azar y la incertidumbre, omnipresentes en el mundo que nos rodea. Aplicada en origen a los juegos de azar, adquirió nueva importancia en el siglo XX con la aplicación de métodos estadísticos al análisis de grandes conjuntos de datos, así como con el desarrollo de la teoría cuántica, que sugiere que la realidad misma está gobernada por el azar.

La probabilidad y la estadística son el tema del capítulo 6, y sobre la relación con la teoría cuántica se proporciona más información en el capítulo 9, dedicado a la relación entre los números y la realidad.

Más allá de la manipulación de los números está la matemática «superior», que tiene tres pilares principales:

1. La *geometría* es probablemente el más familiar. Comienza con un sentido del espacio: la geometría formal codifica los principios para describir de qué manera se pueden relacionar entre sí las cosas en el espacio,

por ejemplo para formar un triángulo. Pero es una descripción estática.

2. El *análisis* es el segundo pilar de las matemáticas superiores. Se ocupa de cosas que se mueven y cambian en el tiempo. Incluye en especial el cálculo integral y diferencial, junto con muchas otras sofisticadas variaciones sobre el tema.

3. El *álgebra* nos permite representar y manipular el conocimiento mediante números, símbolos y ecuaciones, y como tal es el pilar más ancho de las matemáticas superiores formales. Abarca temas abstrusos como la teoría de grupos (conjuntos de elementos que satisfacen ciertas propiedades), la teoría de grafos (que estudia cómo están interconectadas las cosas, por ejemplo los ordenadores en Internet o las neuronas en el cerebro) y la topología (las matemáticas de las formas que se pueden deformar continuamente, sin romperlas ni cambiarlas).

Aunque cada una de estas disciplinas expansivas merecería por sí sola un libro entero, este que tiene el lector en sus manos le permitirá entrever las perspectivas que abren y los problemas que plantean, sobre todo los capítulos 7 y 8, que tratan de los grandes problemas no resueltos de las matemáticas y la aplicación de estas a los problemas del mundo cotidiano.

Pero antes de nada vamos a centrar la atención en una de las cuestiones filosóficas más difíciles de las matemáticas: ¿de dónde provienen?

Las matemáticas: ¿invención o descubrimiento?

Cada vez que corremos para atrapar una pelota o conducimos en medio del tráfico, hacemos, de manera completamente inconsciente, matemáticas. Lo cual tiene sentido. El mundo natural es un lugar complejo e impredecible. Los hábitats cambian, los depredadores atacan, la comida se agota. La supervivencia de un organismo depende de su capacidad para comprender el entorno, ya sea contando hasta la caída de la noche, triangulando la forma más rápida de eludir el peligro o evaluando los lugares con más probabilidad de encontrar alimento. Eso significa hacer matemáticas: manipular números, evaluar la posición y el movimiento con ayuda de la trigonometría y el cálculo infinitesimal y sopesar probabilidades.

Ello apunta a una verdad profunda y difícil de precisar: la realidad es en cierto sentido matemática. Karl Friston, neurocientífico computacional y físico del University College London, observa que en las matemáticas hay simplicidad, parsimonia y simetría. Consideradas como lenguaje, ganarían de calle frente a todas las demás formas de describir el mundo.

Consecuencia inmediata de ello es que no somos los únicos organismos con aptitudes «matemáticas». Desde los delfines hasta los mohos mucilaginosos, todos los organismos del árbol evolutivo parecen analizar matemáticamente el mundo, descifrando sus patrones y regularidades para sobrevivir. Si el entorno se desarrolla de acuerdo con principios matemáticos, argumenta Friston, entonces la anatomía del cerebro tiene también que recoger esos principios matemáticos.

Pero el cerebro humano, con su capacidad aparentemente única para la representación simbólica y el pensamiento abstracto, ha llevado las cosas más lejos. Hemos hecho de las matemáticas una actividad consciente que, en mayor o menor medida, ha de aprenderse. El momento exacto en que la cultura transformó nuestros sentidos instintivos en una aptitud matemática consciente y reconocible se pierde en la noche de los tiempos, pero en la década de 1970 los arqueólogos que investigaban el yacimiento de Border Cave, en la ladera occidental de la cordillera Lebombo, en Sudáfrica, descubrieron una serie de huesos con muescas, entre ellos un peroné de babuino con 29 marcas de ese tipo. Estos huesos con muescas, de unos 40 000 años de antigüedad, parecen haber servido para contar: son la prueba más antigua que tenemos de una emergente comprensión consciente de la representación y manipulación de números.

Los sistemas de contar y medir alcanzaron nuevas cotas en el cuarto milenio a. C. en la sofisticada cultura mesopotámica de los valles del Tigris y el Éufrates. Aquí, en lo que hoy es Iraq, se utilizaron las primeras representaciones simbólicas y sistemáticas de números para llevar el registro de días, meses y años, medir superficies de tierra y cantidades de grano, y tal vez incluso registrar pesos. A medida que los humanos se adentraron en los mares y estudiaron los cielos comenzaron a desarrollar métodos numéricos para la navegación y el seguimiento de objetos celestes.

Esta matemática consciente fue producto de la necesidad cultural: una invención que ayudó a comprender el mundo y llevar a cabo cosas como el comercio y los viajes. Con ayuda de herramientas matemáticas hemos construido, durante los últimos seis mil años, una enorme pirámide de conocimiento matemático. Los matemáticos de la antigua Grecia, como Euclides, formalizaron las reglas de la geometría (véase la figura 1.1) alrededor de 300 a. C. Más o menos mil años más tarde los matemáticos indios y árabes comenzaron a crear los sistemas numéricos con los que estamos familiarizados hoy día, así como a desarrollar herramientas para la representación simbólica y la manipulación de cantidades numéricas: el álgebra.

Pero ni siquiera el gran florecimiento de las matemáticas modernas en la era de la Ilustración del siglo XVII sirvió para otra cosa que para ahondar nuestra comprensión de las cosas dentro del ámbito de la experiencia. El cálculo infinitesimal de Isaac Newton y Gottfried Leibniz, por ejemplo, hizo posible calcular la trayectoria de los cuerpos en movimiento en la Tierra y en los cielos. El sistema de coordenadas inventado por René Descartes proporcionó una representación algebraica de las formas geométricas. Y las teorías emergentes del azar y la probabilidad nos ayudaron a manejar la incertidumbre y la falta de información.

Desde entonces, sin embargo, las matemáticas se han ido expandiendo a dominios cada vez más abstractos y nos han dicho cosas que no podríamos haber esperado comprender mediante la sola observación. Y al hacerlo, han ido adquiriendo cada vez más el carácter de una verdad revelada, de un descubrimiento a la espera de ser hecho, en contraposición a algo inventado, a un puro producto del cerebro humano.

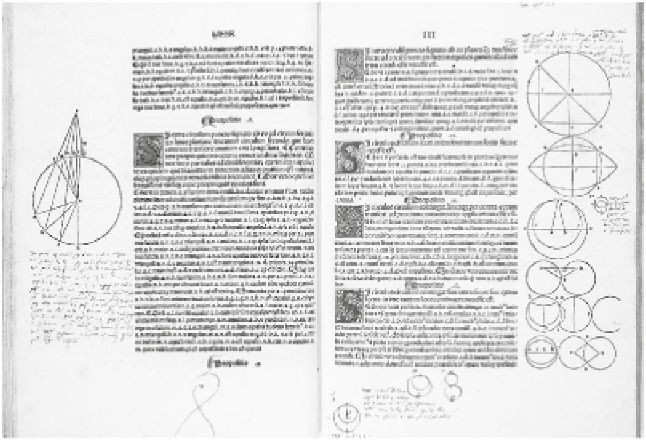

Figura 1.1 Los *Elementos* de Euclides (aquí en su primera edición impresa de 1482) fue un tratado seminal de geometría.

Así, por ejemplo, cuando a comienzos del siglo XX el matemático David Hilbert extendió el álgebra del espacio 3D convencional a otro de infinitas dimensiones, aquello parecía un desarrollo puramente abstracto con poca aplicación al mundo real. Pero un par de décadas más tarde resultó que el estado de una partícula cuántica como mejor se podía describir era utilizando uno de esos «espacios de Hilbert». Las matemáticas subyacentes siguen siendo clave para los intentos de dar sentido a la mecánica cuántica, una teoría de la que todavía no tenemos una comprensión física intuitiva.

Para muchos físicos de hoy día, el éxito de las matemáticas como lenguaje para describir la realidad apunta al papel primordial que tienen en la organización del universo. Otros no van tan lejos y argumentan que seguimos inventando las matemáticas para satisfacer nuestra necesidad de describir el mundo de manera diferente en diferentes contextos.

Consideremos la siguiente secuencia de acontecimientos. El más famoso de los axiomas geométricos establecidos por Euclides dice que dos rectas paralelas nunca se encuentran. Pero en la superficie curva del globo, por ejemplo, las rectas paralelas sí se encuentran: todos los meridianos convergen en los Polos Norte y Sur. La exploración de tales geometrías no euclidianas por el matemático alemán Bernhard Riemann y otros condujo al descubrimiento –o la invención– de una rica veta de las matemáticas que Einstein utilizaría para formular su teoría de la relatividad general. La deformación del espacio-tiempo por cuerpos masivos en la relatividad general se rige por las reglas de la geometría de Riemann, no por las de la geometría euclidiana.

Para Andy Clark, filósofo cognitivo de la Universidad de Edimburgo, el universo está lleno de todo tipo de patrones y regularidades y formas de comportamiento, de manera que cualquier criatura que quiera construir una matemática tendrá que construirla sobre las regularidades que constriñen el comportamiento de las cosas que encuentra a su paso. Siguiendo esta lógica, si las matemáticas son un principio de organización, entonces son un principio que nosotros imponemos al mundo.

Los teoremas de incompletitud de Gödel –una parcela de las matemáticas que paradójicamente es bastante precisa, desarrollada por el matemático austriaco Kurt Gödel en la década de 1930– muestran que siempre habrá preguntas para cuya respuesta las matemáticas nunca tendrán las herramientas necesarias (véase el capítulo 3), lo cual también sugiere que es demasiado pronto para hacer afirmaciones radicales en el sentido de que las matemáticas son una verdad universal. Sobre estas ideas volveremos al final del libro, pero entre tanto diremos que estamos muy lejos de lo que los matemáticos considerarían como una prueba en un sentido u otro.

Nuestros cerebros matemáticos

Todos tenemos una aptitud innata para hacer inconscientemente alguna forma de matemáticas que nos permite movernos por el mundo y sobrevivir. Pero el origen de la capacidad para manejar números es una cuestión más intrigante. ¿Es aprendida o tiene que ver con algo innato? Al fin y al cabo, contar el número de cosas no tiene ningún valor de supervivencia evidente.

Ya en 1997 el psicólogo cognitivo Stanislas Dehaene propuso la teoría de que nacemos con un sentido consciente de los números, igual que somos conscientes de los colores: la evolución ha dotado a los humanos y otros animales de «numerosidad», es decir, la capacidad de percibir inmediatamente el número de objetos en un montón. Tres canicas rojas producirían una sensación del número tres, del mismo modo que producirían la sensación del color rojo.

En seguida comenzaron a acumularse pruebas en apoyo de esta concepción «innatista» de la aptitud numérica, con experimentos que demostraban, por ejemplo, que los bebés de seis meses eran capaces de distinguir

El desarrollo de los números

40 000 a. C.
Los huesos con muescas hallados en Sudáfrica son el primer indicio de conteo en la humanidad.

4 000 a. C.
Los calendarios de Egipto y Mesopotamia (hoy Iraq) indican que estas civilizaciones llevaban la cuenta del paso del tiempo.

250 a. C.
Arquímedes calcula el volumen de la esfera y del cilindro y da un valor aproximado de π.

230 a. C.
Eratóstenes de Cirene inventa el método de la criba para determinar qué números son primos.

***c.*1 a. C.**
El matemático chino Liu Hsin utiliza fracciones decimales.

600 a. C.
En la actual India se utiliza la notación decimal para los números.

1450
Nicolás de Cusa efectúa algunos de los primeros estudios sobre el infinito.

1564
Gerolamo Cardano, matemático y jugador empedernido, escribe un libro sobre cómo funcionan los juegos de azar.

1572
Rafael Bombelli establece reglas para el manejo de los números complejos.

1614
John Napier introduce los logaritmos.

1637
René Descartes aplica el álgebra a la geometría e introduce las coordenadas cartesianas.

3 000 a. C.
Surge en Mesopotamia el primer sistema numérico reconocible.

1 750 a. C.
Los babilonios resuelven ecuaciones lineales y cuadráticas y compilan tablas de raíces cuadradas y cúbicas.

530 a. C.
Pitágoras de Samos demuestra el teorema que lleva su nombre sobre la longitud de los lados de un triángulo rectángulo.

300 a. C.
Euclides escribe los *Elementos,* que entre otras cosas es un extenso tratado de geometría.

628 a. C.
El matemático indio Brahmagupta escribe *Brahmasphutasiddhanta,* donde se introducen los números negativos y el primer cero numérico.

810 a. C.
El matemático árabe al-Juarismi introduce el término «álgebra» y da su nombre a la palabra «algoritmo».

1072
Omar Jayam calcula la duración del año en 365,24219858156 días, un valor asombrosamente preciso.

1202
Fibonacci (Leonardo de Pisa) escribe el *Liber abaci,* introduciendo la aritmética y el álgebra árabes entre los europeos.

1647
Pierre de Fermat enuncia su misterioso último teorema, que no fue demostrado hasta 1994.

1664
Fermat y Blaise Pascal intercambian correspondencia en la que empiezan a esbozar las leyes de la probabilidad.