LA MATEMÁTICA

SU CONTENIDO, MÉTODOS Y SIGNIFICADO

A. D. Aleksandrov, A.N. Kolmogorov,
M. A. Laurentiev y otros

LA MATEMÁTICA
SU CONTENIDO, MÉTODOS Y SIGNIFICADO

Versión española de Manuel López Rodríguez, (capítulos 1 al 5),
Eduardo Abad Rius, (capítulos 6 al 13)
y Andrés Ruiz Merino, (capítulos 14 al 19)

Alianza Editorial

Título de la versión inglesa: *Mathematics: Its Content, Method, and Meaning*

Primera edición en «Alianza Universidad»: 1973
Primera edición en esta colección: 2014
Tercera reimpresión: 2023

Calle Valentín Beato, 21; 28037 Madrid
www.alianzaeditorial.es

PAPEL DE FIBRA CERTIFICADA

ISBN: 978-84-206-9330-9
Depósito legal: M. 27.538-2014
Printed in Spain

ÍNDICE

Parte 2

3. Geometría analítica
B. N. Delone

4. Álgebra: teoría de las ecuaciones algebraicas
B. N. Delone

Prólogo a la edición rusa

Las matemáticas, surgidas en la Antigüedad por necesidades de la vida cotidiana, se han convertido en un inmenso sistema de variadas y extensas disciplinas. Como las demás ciencias, reflejan las leyes del mundo que nos rodea y sirven de potente instrumento para el conocimiento y dominio de la naturaleza. Pero el alto nivel de abstracción que caracteriza a las matemáticas trae consigo el que todas sus ramas sean relativamente inaccesibles a los no especialistas. Esta cualidad abstracta de las matemáticas dio lugar, ya en la Antigüedad, a nociones idealistas sobre su independencia respecto del mundo material.

En la preparación del presente volumen, la finalidad perseguida por los autores ha sido la de familiarizar a un círculo suficientemente amplio de la inteligentsia soviética con las diversas disciplinas matemáticas, su contenido y métodos, los fundamentos sobre los que descansan y los caminos a lo largo de los cuales se han desarrollado.

El bagaje mínimo de conocimientos matemáticos que precisa el lector de este libro son las matemáticas a nivel de enseñanza media, aunque los volúmenes difieren en lo que toca a la accesibilidad del material tratado. El lector que desee iniciarse en los elementos de las matemáticas superiores puede leer con provecho algunos de los primeros capítulos; sin embargo, para una completa comprensión de las partes subsiguientes le será necesario recurrir a los correspondientes libros de texto. El libro en su totalidad podrá ser asimilado de manera fundamental solamente por aquellos lectores que ya tengan algún conocimiento de las aplicaciones del análisis matemático, es decir, del cálculo diferencial y del cálculo integral. Para tales lectores —profesores de matemáticas, ingeniería y ciencias naturales— será particularmente importante la lectura de aquellos capítulos en los que se introducen las ramas más recientes de las matemáticas.

Naturalmente, dentro de los límites de un solo libro no ha sido posible agotar toda la riqueza ni siquiera de los resultados más fundamentales de la investigación matemática; una cierta libertad en la elección del material ha sido inevitable. Pese a ello, en líneas generales el presente libro dará una idea de la situación actual de las matemáticas, sus orígenes y su probable desarrollo futuro. Por esta razón, la obra está pensada también hasta cierto punto para personas ya familiarizadas con la mayoría de los temas contenidos en ella, lo cual quizá contribuya a eliminar esa estrechez de miras que se descubre ocasionalmente en algunos de nuestros jóvenes matemáticos.

Los distintos capítulos del libro están escritos por diversos autores cuyos nombres se dan en el índice; no obstante, el libro en su conjunto ha sido escrito en colaboración. El plan general, la elección del material, las sucesivas versiones de capítulos concretos, todo ello fue sometido a discusión general, introduciendo mejoras aquí y allá tras un animado cambio de opiniones. Matemáticos de distintas ciudades de la Unión Soviética tuvieron la oportunidad, mediante discusiones organizadas, de hacer numerosas y valiosas observaciones concernientes a la versión original del texto. Sus opiniones y sugerencias han sido tenidas en cuenta por los autores.

Los autores de algunos capítulos también tomaron parte directa en la redacción de la versión final de otros capítulos: la introducción del capítulo 2 fue escrita esencialmente por B. N. Delone, mientras que D. K. Fadiev desempeñó un activo papel en la preparación de los capítulos 4 y 18. Parte del trabajo fue también realizado por personas distintas de los autores de los diferentes capítulos: la sección 6 del capítulo 6 fue redactada por O. A. Ladyzenskaia; la sección 5 del capítulo 10, por A. G. Postnikov; sobre el texto del capítulo 5 trabajó O. A. Oleinik, y sobre el del capítulo 11, Ju. V. Prohorov.

Ciertas secciones de los capítulos 1, 2, 7, 16 fueron escritas por V. A. Zalgaller. La edición del texto final fue realizada por V. A. Zalgaller y V. S. Videnski con la colaboración de T. V. Rogozkinaia y A. P. Leonovaia.

La mayor parte de las ilustraciones fueron preparadas por E. P. Senikin.

Moscú
1956

COMITÉ DE EDITORES

LA MATEMÁTICA

SU CONTENIDO, MÉTODOS Y SIGNIFICADO

Parte 1

1. Visión general de la matemática
A. D. Aleksandrov

2. Análisis
M. A. Laurentiev y S. M. Nikolski

Capítulo 1

VISIÓN GENERAL DE LA MATEMÁTICA

Una adecuada presentación de cualquier ciencia no puede consistir sólo en información detallada, aunque sea extensa; debe también dar una visión propia de la naturaleza esencial de la ciencia en conjunto. El objeto del presente capítulo es dar un cuadro general de la naturaleza esencial de la matemática. Para ello no hay gran necesidad de entrar en detalles de teorías matemáticas recientes, puesto que la matemática elemental y la historia de la ciencia ya proporcionan base suficiente para obtener conclusiones generales.

§ 1. *Rasgos característicos de la matemática*

1. *Abstracciones, demostraciones, aplicaciones*

Incluso con un conocimiento superficial de la matemática, es fácil reconocer ciertos rasgos característicos: su abstracción, su precisión, su rigor lógico, el irrefutable carácter de sus conclusiones y, finalmente, el campo excepcionalmente amplio de sus aplicaciones.

Es fácil reconocer el carácter abstracto de la matemática. Operamos con números abstractos sin preocuparnos de cómo relacionarlos en cada caso a objetos concretos. En la escuela se estudia la tabla abstracta de multiplicar, esto es, una tabla para multiplicar un número abstracto por otro, no un número de muchachos por un número de manzanas o un número de manzanas por el precio de una manzana.

De modo similar, en geometría consideramos, por ejemplo, líneas rectas y no hilos gruesos, llegándose al concepto de línea geométrica por abstracción de todas las propiedades excepto la extensión en una dirección. En general, el concepto de figura geométrica es el resultado de la abstracción de todas las propiedades de un objeto exceptuadas su forma espacial y dimensiones.

Abstracciones de esta clase son características en toda la matemática. Los conceptos de número y de figura geométrica son sólo dos de sus primeros y más elementales ejemplos, seguidos luego por muchos otros, demasiado numerosos para describirlos, y que tienen que ver con abstracciones tales como números complejos, funciones, integrales, diferenciales, funcionales, espacios n-dimensionales e incluso espacios de infinitas dimensiones, etc. Estas abstracciones, apoyadas unas en otras, han alcanzado tal grado de generalización que pierden aparentemente toda conexión con la vida diaria, y el hombre medio no entiende nada de ellas salvo el simple hecho de que «todo esto es incomprensible».

La realidad, naturalmente, no es esa en absoluto. Aunque el concepto de espacio n-dimensional es, sin duda, extremadamente abstracto, todavía tiene un contenido completamente real, que no es muy difícil de entender. En este libro nuestro propósito será el de dar a conocer y aclarar el contenido concreto de conceptos abstractos tales como los ya mencionados, de modo que el lector pueda convencerse por sí mismo de que todos ellos están relacionados con la vida real, tanto en su origen como en sus aplicaciones.

Pero la abstracción no es algo exclusivo de la matemática; es característica de toda ciencia, incluso de toda actividad mental en general. Consecuentemente, la abstracción de los conceptos matemáticos no proporciona por sí misma una descripción del carácter peculiar de la matemática.

Las abstracciones de la matemática se distinguen por tres rasgos. En primer lugar, tratan fundamentalmente de las relaciones cuantitativas y formas espaciales, abstrayéndolas de todas las demás propiedades de los objetos. En segundo lugar, aparecen en una sucesión de grados de abstracción creciente, llegando mucho más lejos en esta dirección que la abstracción en las demás ciencias. Más tarde ilustraremos estas dos cualidades en detalle, empleando como ejemplos las nociones fundamentales de número y figura. Finalmente, y esto es obvio, la matemática como tal se mueve casi por completo en el campo de los conceptos abstractos y sus interrelaciones. Mientras el científico de la naturaleza experimenta constantemente para demostrar sus aseveraciones, el matemático emplea sólo razonamientos y cálculos.

Es cierto que los matemáticos también hacen constante uso —como ayuda en el descubrimiento de teoremas y métodos— de modelos y analogías físicas, y que recurren con frecuencia a ejemplos bien concretos. Estos constituyen la fuente real de la teoría y un medio de descubrir teoremas; pero ningún teorema pertenece definitivamente a la matemática hasta que no ha sido rigurosamente demostrado por un razonamiento lógico. Si un geómetra diese cuenta de un teorema recientemente descubierto mediante simples modelos y se limitara a tal demostración, ningún matemático admitiría que el teorema había sido probado. La necesidad de demostrar los teoremas es ya normal en la geometría del bachillerato y se extiende a toda la matemática. Podríamos medir los ángulos de la base de miles de triángulos isósceles con extrema precisión, pero ese procedimiento nunca nos daría una demostración matemática del teorema que dice que esos dos ángulos son iguales. La matemática pide que este resultado se deduzca de los conceptos fundamentales de la geometría, conceptos que, teniendo en cuenta el hecho de que la geometría de nuestros días está desarrollada sobre una base rigurosa, se hallan formulados con toda precisión en los axiomas. Y así es en todos los casos. Demostrar un teorema significa que el matemático lo deduzca, mediante un razonamiento lógico, a partir de propiedades fundamentales de los conceptos que aparecen en ese teorema. De este modo, no sólo los conceptos, sino también los métodos de la matemática, son abstractos y teóricos.

Los resultados de la matemática se distinguen por su alto grado de rigor lógico, y los razonamientos matemáticos se desarrollan con una minuciosidad tal que lo hagan incontestable y convincente para todo el que lo entienda. La minuciosidad y fuerza de las demostraciones matemáticas son ya bien conocidas en los cursos de bachillerato superior. Las verdades matemáticas son de hecho el prototipo de lo completamente incontestable. Por algo se dice: «tan claro como que dos y dos son cuatro». Aquí la relación «dos y dos son cuatro» se emplea como paradigma de lo irrefutable e incontestable.

Pero el rigor de la matemática no es absoluto; está en proceso de continuo desarrollo; los principios de la matemática no se han congelado de una vez para siempre sino que tienen su propia vida y pueden incluso ser objeto de discusiones científicas.

En último término la vitalidad de la matemática se debe al hecho de que, a pesar de su abstracción, sus conceptos y resultados tienen su origen, como veremos, en el mundo real y encuentran muchas y diversas aplicaciones en otras ciencias, en ingeniería y en todos los aspectos prácticos de la vida diaria; reconocer esto es el requisito previo más importante para entender la matemática.

La excepcional amplitud de sus aplicaciones es otro rasgo característico de la matemática.

En primer lugar hacemos constante uso, en la industria y en la vida social y privada, de los más variados conceptos y resultados de la matemática sin pensar en ello; por ejemplo, empleamos la aritmética para calcular nuestros gastos o la geometría para calcular la superfice de un apartamento. Naturalmente, las reglas a emplear son muy sencillas, pero deberíamos recordar que en algún período de la antigüedad representaron los logros matemáticos más avanzados de la época.

Segundo, la tecnología moderna sería imposible sin la matemática. No hay probablemente un sólo proceso técnico que pueda realizarse sin cálculos más o menos complicados; y la matemática juega un papel muy importante en el desarrollo de nuevas ramas de la tecnología.

Finalmente, es cierto que toda ciencia, en mayor o menor grado, hace un uso esencial de la matemática. Las «ciencias exactas», mecánica, astronomía, física y una gran parte de la química, expresan sus leyes, como todo estudiante sabe, por medio de fórmulas, y utilizan ampliamente el aparato matemático en el desarrollo de sus teorías. El progreso de estas ciencias habría sido completamente imposible sin la matemática. Por esta razón, las necesidades de la mecánica, astronomía y física han ejercido siempre una directa y decisiva influencia en el desarrollo de la matemática.

En otras ciencias la matemática tiene un papel menor, pero también encuentra importantes aplicaciones. Naturalmente, en el estudio de fenómenos tan complicados como los que aparecen en biología y sociología, los métodos matemáticos no pueden desempeñar el mismo papel que, por ejemplo, en la física. En todos los casos, pero especialmente allí donde los fenómenos son más complicados, debemos tener en cuenta que si no queremos perder el tiempo manejando fórmulas desprovistas de significado, la aplicación de la matemática es útil sólo si se aplica a fenómenos concretos que ya han sido objeto de una profunda teoría. De un modo u otro, la matemática se aplica en casi todas las ciencias, desde la mecánica hasta la economía política.

Recordemos algunas aplicaciones particularmente brillantes de la matemática en las ciencias exactas y en la tecnología.

El planeta Neptuno, uno de los más distantes del sistema solar, fue descubierto en el año 1846 mediante cálculos matemáticos. Analizando ciertas irregularidades en el movimiento de Urano, los astrónomos Adams y Leverrier llegaron a la conclusión de que estas irregularidades eran producidas por la atracción gravitatoria de otro planeta. Leverrier calculó, basándose en las leyes de la mecánica, el lugar exacto donde debía estar el planeta; y un observador a quien comunicó sus resultados lo localizó con su telescopio en la posición indicada por Leverrier. Este descubrimiento fue un triunfo no sólo para la mecánica y la astronomía (y en particular para el sistema de Copérnico), sino también para la potencia del cálculo matemático.

Otro ejemplo, no menos impresionante, fue el descubrimiento de las ondas electromagnéticas. Generalizando las leyes de los fenómenos electromagnéticos establecidos experimentalmente, el físico inglés Maxwell logró expresarlas en forma de ecuaciones. A partir de estas ecuaciones dedujo, por métodos puramente matemáticos, que las ondas electromagnéticas podían existir y que debían propagarse con la velocidad de la luz. A partir de este resultado propuso la teoría electromagnética de la luz, que fue más tarde desarrollada y profundizada en todas direcciones. Además, los resultados de Maxwell llevaron a la búsqueda de ondas electromagnéticas de origen puramente eléctrico, obteniéndose, por ejemplo, de una carga oscilante. Estas ondas fueron observadas experimentalmente por Hertz. Poco después, A. S. Popov, al descubrir el modo de excitar, transmitir y recibir oscilaciones electromagnéticas las hizo útiles para un gran campo de aplicaciones y de ese modo puso los cimientos de toda la radiotécnica. En el descubrimiento de la radio, ahora posesión común de todos, tuvieron un papel muy importante los resultados de una deducción puramente matemática.

Así, partiendo de la observación —como por ejemplo de la desviación de una aguja magnética por una corriente eléctrica—, la ciencia procede por generalización a una teoría de los fenómenos, a una formulación de las leyes y a expresiones matemáticas de ellas. De estas leyes vienen nuevas deducciones y, finalmente, la teoría es llevada a la práctica, que a su vez proporciona nuevos y poderosos impulsos al desarrollo de la teoría.

Es particularmente notable que incluso las construcciones más abstractas de la matemática, aquellas que surgen dentro de la misma ciencia sin motivación inmediata de las ciencias naturales o de la tecnología, tienen sin embargo fructíferas aplicaciones. Por ejemplo, los números imaginarios vieron por primera vez la luz en álgebra, y durante largo tiempo su significado en el mundo real permaneció desconocido, circunstancia indicada por su propio nombre. Pero cuando alrededor de 1800 se les dio una interpretación geométrica (ver cap. 4, § 2), los números imaginarios quedaron firmemente afincados en la matemática, dando lugar a la extensa teoría de funciones de una variable compleja, es decir, de una variable de la forma $x + y\sqrt{-1}$. Esta teoría de funciones «imaginarias» de una variable «imaginaria» demostró que, lejos de ser imaginaria, era un medio muy práctico de resolver problemas tecnológicos. Así, los resultados fundamentales de N. E. Jukovski referentes a la fuerza ascensional del ala de un aeroplano en vuelo se demostraron por medio de esta teoría. La misma teoría es útil, por ejemplo, para la resolución de problemas referentes al encenagamiento del agua de un pantano, problemas cuya importancia es obvia en el momento actual de construcción de enormes estaciones hidroeléctricas.

Otro ejemplo, igualmente expresivo, lo ofrece la geometría no-euclídea [1], que apareció como culminación de una labor de dos mil años, iniciada en tiempos de Euclides para demostrar el axioma de las paralelas, un problema de interés puramente matemático. N. I. Lobachevski, fundador de la nueva geometría, tuvo cuidado en denominar a su geometría «imaginaria», puesto que no veía sentido para ella en el mundo real, aunque esperaba que algún día se encontraría. Los resultados de su geometría se les antojaban a la mayoría de los matemáticos no sólo «imaginarios», sino incluso inimaginables y absurdos. Sin embargo, sus ideas fueron el fundamento para un nuevo desarrollo de la geometría, con la aparición de teorías de espacios no-euclídeos; y posteriormente estas mismas ideas fueron la base de la teoría general de la relatividad, en la cual el aparato matemático consiste en una cierta forma de geometría no-euclídea de un espacio de cuatro dimensiones. Así, las construcciones abstractas de la matemática, que al principio parecieron incomprensibles, demostraron ser un poderoso instrumento para el desarrollo de una de las más importantes teorías de la física. Igual-

[1] Aquí nos limitamos a dar este ejemplo sin más explicaciones; para ello el lector puede consultar el capítulo 16.

mente, en la teoría actual de los fenómenos atómicos, en la llamada mecánica cuántica, es esencial el uso de numerosos conceptos matemáticos extremadamente abstractos, como por ejemplo el concepto de espacio de dimensión infinita.

No hay necesidad de dar otros ejemplos, puesto que ya hemos demostrado con suficiente énfasis que la matemática encuentra extensa aplicación en la vida diaria, en la tecnología y en la ciencia; en las ciencias exactas y en los problemas más complicados de la tecnología encuentran aplicación incluso aquellas teorías que nacen de la matemática misma. Esta es una de las características peculiares de la matemática, junto con su abstracción y el rigor y conclusión de sus resultados.

2. *Naturaleza esencial de la matemática*

Discutiendo estos rasgos especiales de la matemática estamos lejos de explicar su esencia; más bien hemos mostrado simplemente sus signos externos. Nuestra tarea ahora es explicar la naturaleza esencial de estos rasgos característicos. Para ello, será necesario responder, por lo menos, a las siguientes preguntas:

¿Qué reflejan estos conceptos matemáticos abstractos? En otras palabras, ¿cuál es el verdadero objeto de la matemática?

¿Por qué los resultados abstractos de la matemática parecen tan convincentes, y sus conceptos iniciales tan obvios? En otras palabras, ¿sobre qué cimientos reposan los métodos matemáticos?

¿Por qué, a pesar de toda su abstracción, encuentra la matemática tan amplias aplicaciones y no se queda simplemente en un juego fútil de abstracciones? En otras palabras, ¿cómo se explica el significado de la matemática?

Finalmente, ¿qué fuerzas llevan a nuevos desarrollos de la matemática, permitiendo unir la abstracción con la amplitud de sus aplicaciones? ¿Cuál es la base para su continuo crecimiento?

Resolviendo estas cuestiones formaremos un cuadro general del contenido de la matemática, de sus métodos, de su significado y su desarrollo; esto es, entenderemos su esencia.

Idealistas y metafísicos no sólo se ven sumidos en un mar de confusiones al intentar responder a estas cuestiones básicas, sino que llegan a distorsionar completamente la matemática, volviéndola literalmente del revés. Así, viendo la extrema abstracción y fuerza lógica de los resultados matemáticos, los idealistas imaginan que la matemática brota del pensamiento puro.

En realidad, la matemática no ofrece el más ligero soporte para el idealismo o la metafísica. De esto nos convenceremos cuando intentemos resolver, en un esquema general, las cuestiones que acabamos de enunciar acerca de la esencia de la matemática. Para una clarificación preliminar de estas cuestiones, es suficiente examinar los fundamentos de la aritmética y la geometría elemental, a las cuales dirigimos ahora nuestra atención.

§ 2. *Aritmética*

1. *El concepto de número entero*

El concepto de número (por el momento hablaremos sólo de números enteros positivos), que tan familiar nos es hoy a nosotros, fue elaborado muy lentamente. Esto puede verse en el modo de contar de distintas razas que hasta tiempos muy recientes han permanecido en un nivel relativamente primitivo de vida social. En algunas de ellas los números mayores que dos o tres no tenían ya nombre; en otras llegaban algo más lejos pero terminaban al cabo de pocos números; para los restantes decían simplemente «muchos» o «incontables». Sólo gradualmente se fueron acumulando en los pueblos un conjunto de nombres claramente distintos para los números.

Al principio estos pueblos no tenían la noción de número, aunque podían, a su manera, juzgar sobre el tamaño de una u otra colección de objetos con los que se encontraban a diario. Debemos concluir que los números eran directamente percibidos por ellos como una propiedad inseparable de una colección de objetos, una propiedad que ellos, sin embargo, no podían claramente distinguir. Hoy día estamos tan acostumbrados a contar que difícilmente podemos imaginar este estado de cosas, pero es posible entenderlo [2].

A un nivel inmediatamente superior, el número aparece ya como una propiedad de una colección de objetos, aunque no se distingue todavía de la colección en cuanto «número abstracto», en cuanto número no relacionado con objetos concretos. Esto es obvio si observamos los nombres que reciben algunos números entre ciertos

[2] De hecho, toda colección de objetos, tanto si es un rebaño de ovejas como un haz de leña, existe y es inmediatamente percibida en toda su concreción y complejidad. Distinguir en ella propiedades y relaciones es resultado de un análisis consciente. El pensamiento primitivo no realiza todavía este análisis, sino que considera los objetos como un todo. De modo semejante, un hombre que no ha estudiado música percibe una composición musical sin distinguir en ella detalles de la melodía, tonalidad, etc., mientras que un músico analiza fácilmente incluso una complicada sinfonía.

pueblos: «mano» para cinco y «hombre completo» para veinte. Aquí cinco se entiende no en sentido abstracto, sino simplemente en el sentido de «tantos como los dedos de una mano»; veinte es «tantos como los dedos de las manos y los pies de un hombre», y así sucesivamente. De un modo completamente análogo, ciertos pueblos no tenían los conceptos de «negro», «duro» o «circular». Para decir que un objeto es negro, lo comparaban con un cuervo, por ejemplo, y para decir que había cinco objetos, comparaban directamente estos objetos con una mano. De este modo también ocurrió que se utilizaron distintos nombres para un mismo número de objetos distintos; ciertos números para contar personas, otros para contar botes, y así sucesivamente, hasta llegar incluso a diez diferentes clases de números. Pero no se trata de números abstractos, sino simplemente de una especie de «apelación» referida sólo a una clase concreta de objetos. Otros pueblos no tenían en general nombres para designar los números; por ejemplo, no existía la palabra «tres», aunque podían decir «tres hombres» o «en tres lugares», etc.

Entre nosotros mismos ocurre algo parecido: a menudo decimos que este o aquel objeto es negro, pero pocas veces hablamos acerca de la «negrura» en sí misma, que es un concepto más abstracto [3].

El número de objetos de una colección dada es una propiedad de la colección, pero el número en sí, el «número abstracto», es una propiedad abstraída de la colección concreta y considerada simplemente en sí misma, al igual que «negrura» o «dureza». Y lo mismo que la negrura es una propiedad común a todos los objetos del color del carbón, así el número «cinco» es la propiedad común a todas las colecciones que contienen objetos como dedos hay en una mano. En este caso la igualdad de los dos números se establece por simple comparación: tomamos un objeto de la colección, doblamos un dedo, y así hasta terminar la colección. En general, apareando los objetos de dos colecciones es posible establecer, sin hacer uso para nada de los números, si las colecciones tienen o no el mismo número de objetos. Por ejemplo, cuando los huéspedes pasan a ocupar sus luga-

[3] En la formación de los conceptos referentes a propiedades de los objetos, tales como el color o la extensión de una colección, es posible distinguir tres etapas, que no se deben, naturalmente, intentar separar tajantemente unas de otras. En la primera etapa la propiedad se define comparando directamente los objetos: «como un cuervo», «tantos como en una mano». En la segunda aparece un adjetivo: «una piedra negra» o «cinco árboles» (el adjetivo numérico es muy análogo en este sentido). En la tercera etapa se abstrae la propiedad de los objetos y puede aparecer «como tal»; por ejemplo «negrura», o el número abstracto «5».

res en la mesa, la patrona sabe inmediatamente, sin necesidad de contar, si ha puesto o no un cubierto de menos, para lo cual basta mirar si algún comensal ha quedado sin lugar en la mesa.

De este modo es posible dar la siguiente definición: un número (tal como «dos», «cinco», etc.) es aquella propiedad de las colecciones de objetos que es común a todas las colecciones cuyos objetos pueden ponerse en correspondencia biunívoca unos con otros, y que es diferente en aquellas colecciones para las cuales tal correspondencia es imposible. Para descubrir esta propiedad y distinguirla claramente —esto es, para formar el concepto de número y darle un nombre: «seis», «diez», etc.— fue necesario comparar entre sí muchas colecciones de objetos. Durante generaciones y generaciones la gente repitió la misma operación millones de veces y de este modo descubrió los números y las relaciones entre ellos.

2. *Relaciones entre los números enteros*

Las operaciones con números aparecen como reflejo de las relaciones entre los objetos concretos. Esto se observa incluso en los nombres de los números. Por ejemplo, entre ciertos indios americanos el número «veintiséis» se pronuncia como «encima de dos dieces coloco un seis», que es claramente reflejo de un método concreto de contar objetos. La adición de números corresponde a situar juntas o unidas dos o más colecciones, y es igualmente fácil entender el significado concreto de la sustracción, multiplicación y división. La multiplicación en particular se debió en gran parte, como parece claro, al hábito de contar colecciones iguales: esto es, por doses, por treses, etc.

En el proceso de contar, los hombres no sólo descubrieron y asimilaron las relaciones entre los números, como, por ejemplo, que dos y tres son cinco, sino que también fueron estableciendo gradualmente ciertas leyes generales. Experimentalmente se descubrió que una suma no depende del orden de los sumandos y que el resultado de contar un conjunto dado de objetos no depende del orden en que se cuente, hecho que se refleja en la identidad esencial de los números «ordinal» y «cardinal»: primero, segundo, tercero, y uno, dos, tres. De este modo los números aparecen no como entidades separadas e independientes, sino relacionadas unas con otras.

Algunos números se expresan y se escriben en términos de otros. Así, en inglés «veinte» denota «dos (veces) diez»; en francés ochenta es «cuatro-veintes» (quatre vingt), noventa es «cuatro-veintes-diez»; y los números romanos VIII y IX, por ejemplo, denotan que $8 = 5 + 3$ y que $9 = 10 - 1$.

En general, los números no aparecieron como entidades separadas, sino como un sistema con sus relaciones mutuas y sus reglas. El objeto de la aritmética es exactamente éste, el sistema de números con sus relaciones mutuas y sus reglas [4]. Los números abstractos en sí no tienen propiedades tangibles y en general se puede decir muy poco sobre ellos. Si nos preguntamos, por ejemplo, por las propiedades del número seis, observamos que $6 = 5 + 1$, $6 = 3 \cdot 2$, que 6 es factor de 30, etc. Pero aquí el número 6 está siempre relacionado con otros números; de hecho, las propiedades de un número dado consisten precisamente en sus relaciones con otros números [5]. Está claro, por consiguiente, que toda operación aritmética determina una conexión o relación entre números. Así, el objeto de la aritmética son las relaciones entre números. Pero estas relaciones son las imágenes abstractas de las relaciones cuantitativas reales entre colecciones de objetos; así podemos decir que la aritmética es la ciencia de las relaciones cuantitativas reales consideradas abstractamente, esto es, simplemente como relaciones. La aritmética, como vemos, no surge del pensamiento puro, como pretenden los idealistas, sino que es reflejo de propiedades definidas de las cosas reales; surge de una larga experiencia práctica de muchas generaciones.

3. *Símbolos numéricos*

A medida que la vida social se hizo más intensa y complicada, fueron apareciendo problemas más complejos. No sólo fue necesario anotar el número de objetos de un conjunto y comunicárselo a otros —necesidad que ya había conducido a la formulación del concepto de número y su denominación—, sino que llegó un momento en que fue esencial aprender a contar colecciones cada vez mayores de animales en un rebaño, de objetos para trueque, de días anteriores a una

[4] La palabra «aritmética», que, significando «arte de calcular», deriva del adjetivo griego «aritmética», formado a partir del substantivo «arithmos», que significa «número». El adjetivo modifica el nombre «techne» (arte, técnica), que aquí se sobreentiende.

[5] Esto se deduce de consideraciones muy generales. Cualquier abstracción, eliminada su base concreta (igual que un número se abstrae de una colección completa de objetos), carece de sentido «en sí misma»; sólo existe en sus relaciones con otros conceptos. Estas relaciones ya están implícitas en cualquier afirmación sobre la abstracción, en su más imperfecta definición. Sin ellas la abstracción pierde todo contenido y significado, es decir, sencillamente no existe. El contenido del concepto de número abstracto reside en las reglas, en las relaciones mutuas del sistema de números.